UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROPORCIONES EN EL GRADO SÉPTIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL

JUAN MANUEL DAZA LÓPEZ

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2014

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROPORCIONES EN EL GRADO SÉPTIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
Profesora Clara Helena Sánchez Botero

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2014

A Dios por guiar mi camino y colmarme de bendiciones, a mis padres por todo el amor y el inmenso apoyo que desde niño me han ofrecido, a mis hermanas por ser el ejemplo de vida, a mi novia por acompañarme en los momentos difíciles y a mi mejor amigo por realizar esta maestría conmigo.

AGRADECIMIENTOS

A mi directora de trabajo de grado, Clara Helena Sánchez Botero, por todo el tiempo dedicado en sus correcciones y sus múltiples enseñanzas y aportes que hicieron posible la realización de este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se realiza una reflexión sobre el razonamiento proporcional y sus aplicaciones en diferentes contextos, tomando como base los aspectos disciplinares, didácticos e históricos-epistemológicos, con el fin de elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones en el grado séptimo, que permita sugerir estrategias para superar la falta de transversalidad detectada en el área de matemáticas de la Institución Educativa Departamental San Miguel, ubicada en el municipio de Sibaté, Cundinamarca. Dicha propuesta está enmarcada en el modelo pedagógico Enseñanza para la Comprensión y toma como base los Estándares básicos de Competencias en Matemáticas y Ciencias del Ministerio de Educación Nacional.

Palabras clave: Razonamiento proporcional, razones, proporciones, transversalidad.

ABSTRACT

In this paper, a reflection is done about the proportional reasoning and its applications in different contexts, taking into consideration the disciplinary, didactics and historic-epistemological aspects, in order to elaborate a didactic proposal for the teaching of proportions in Seventh grade, which allows suggestions of strategies to overcome the lack of the latent transversality in the Mathematics Area at Institución Educativa Departamental San Miguel, located in Sibaté town, Cundinamarca. Such proposal is presented under the pedagogic model Teaching for Understanding´s precepts and based on the Ministry of Education’s Math and Sciences Basic Competence Standards.

Key words: Proportional reasoning, reasons, proportions, transversality.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

Lista de figuras

Pág.

Lista de tablas

Pág.

INTRODUCCIÓN

En mis años de experiencia como docente, he podido evidenciar la importancia que tiene la enseñanza de la proporcionalidad en los estudiantes a través de su formación escolar, no solo en la misma matemática, sino en las relaciones existentes con otras áreas del conocimiento. Si analizamos con detenimiento, la noción de proporcionalidad está inmersa en diversas situaciones de la misma matemática, que realizamos constantemente y en pocas ocasiones reflexionamos sobre el estrecho vínculo que tienen. Ejemplos de esto pueden ser, el cambio de unidades de medidas, como pasar de centímetros a metros, calcular porcentajes, analizar semejanzas de triángulos, conceptos que llevan implícito una relación proporcional. Esto ocurre también en áreas como las ciencias naturales, ciencias sociales, arte, música, entre otras, con ejemplos como la velocidad, presión, concentraciones, peso específico, densidad de población, tasa de natalidad, crecimiento demográfico, escalas en mapas y dibujos.

Lamentablemente, en muchas ocasiones, en nuestro contexto y específicamente en el que me desenvuelvo en la actualidad, estas nociones son enseñadas desligándolas de la comprensión de la proporcionalidad y relegadas a la utilización de fórmulas que carecen de sentido para la gran mayoría de los estudiantes. Esto debido tal vez a la falta de comprensión por parte de nosotros como docentes del concepto de proporcionalidad y sus diversas aplicaciones en diferentes campos del saber y a la manera como desarrollamos el plan de estudios, tal como lo afirman PANIZZA, M. y SADOVSKY, P. (1994). Estamos acostumbrados a pensar en la proporcionalidad como un contenido escolar que se trabaja en un determinado momento, se desarrolla, se ejercita, y se da por finalizado para pensar en el siguiente tema.

Es precisamente la falta de transversalidad entre las diferentes áreas del conocimiento y sin ir tan lejos, dentro de la misma matemática, la que genera en ciertos momentos desmotivación por parte de los estudiantes; al no ver la importancia de las matemáticas en su vida diaria, y no me refiero necesariamente a la adquisición de algoritmos o conocimientos básicos para desenvolverse en la vida diaria, sino a la capacidad de resolver problemas y adaptarse al cambio que es tan necesario en nuestra cultura.

Este trabajo es una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad, dirigida a estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Departamental San Miguel, en busca de sugerir estrategias para las problemáticas existentes en el área de matemáticas por la falta de transversalidad con otras áreas del conocimiento, requerida y propuesta por los estándares básicos de competencias en nuestro país, y así lograr en los estudiantes una mejor comprensión del concepto y de sus diferentes aplicaciones. Está organizado en cuatro grandes capítulos: Aspectos históricos y epistemológicos, aspectos disciplinares, aspectos didácticos y propuesta didáctica. Finalmente se encontrarán las conclusiones del trabajo presentado.

En el primer capítulo se describe el origen geométrico del concepto de proporcionalidad, realizando un barrido histórico por diferentes aplicaciones del razonamiento proporcional en diversas áreas del conocimiento, debido a que es la transversalidad la razón primordial de este trabajo. De esta manera se observará la influencia de la proporción aurea en el arte y la arquitectura, en obras tan famosas como el Stonehenge y las fachadas del Coliseo Romano. También se presentará la importancia de la proporcionalidad en áreas como la física y la astronomía, en donde su desarrollo ha ido de la mano de este concepto, pues sin él Kepler y Newton no hubieran podido elaborar sus leyes y grandes teorías. Así mismo antiguos astrónomos como Aristarco 260 a. C. y Eratóstenes 195 a. C. difícilmente hubieran calculado el diámetro de la tierra y su distancia al sol.

En el segundo capítulo se expondrán las definiciones y propiedades de las proporciones más relevantes para las necesidades de este trabajo, con el fin de dar soporte teórico a la propuesta didáctica.

En el tercer capítulo se discutirá sobre el desarrollo del pensamiento proporcional en los estudiantes de básica y media según las investigaciones realizadas por expertos en el área. También se examinarán los estándares básicos de competencias en matemáticas y ciencias del Ministerio de Educación Nacional, por ser estos los criterios que permiten establecer los niveles básicos de calidad de la educación a los que tienen derecho los niños y las niñas de todas las regiones del país, en todas las áreas que integran el conocimiento escolar. Se expondrán las definiciones que existen sobre proporcionalidad en los libros de texto con los que cuenta la Institución Educativa Departamental San Miguel, por ser estos la primera fuente de consulta de los estudiantes. También se analizarán algunos obstáculos epistemológicos en el proceso enseñanza aprendizaje de la proporcionalidad. Para terminar este capítulo se expondrá el modelo pedagógico en el cual está desarrollada la propuesta didáctica, llamado Enseñanza para la Comprensión.

En el cuarto capítulo se presenta la propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado séptimo de la Institución educativa Departamental San Miguel, la cual inicia con los análisis de la prueba diagnóstico aplicada a 37 estudiantes del grado séptimo con el fin de indagar sobre los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre razonamiento proporcional. También se encuentra un sondeo realizado a los docentes de la institución, para observar sus opiniones sobre la realización de una propuesta didáctica que dé un enfoque trasversal a la enseñanza de las matemáticas teniendo en cuenta otras áreas del conocimiento. Finalmente se realiza la secuencia didáctica que privilegia el desarrollo del razonamiento proporcional en diferentes contextos como lo son el arte, la biología, la astronomía, las ciencias sociales y la geometría entre otros.

Se termina con unas conclusiones y la bibliografía.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los últimos dos años me he desempeñado como docente de matemáticas en la Institución Educativa Departamental San Miguel. Un colegio de carácter oficial ubicado en el sector rural del municipio de Sibaté, que atiende una población de estratos 1 y 2. El colegio carece de infraestructura y de algunos recursos como laboratorios, aulas especializadas y suficientes herramientas tecnológicas que abarquen la demanda de la población. Contamos con un aproximado de 300 estudiantes en la básica y media, lo que facilita el manejo de la convivencia y crea un ambiente familiar, tanto para los docentes como para los estudiantes.

No obstante el nivel académico no es el mejor, siendo la falta de transversalidad, entre las áreas que componen el currículo, uno de los problemas más destacados. Los estudiantes no logran concatenar los conocimientos adquiridos en un área para aplicarlos o relacionarlos en otra. Esto se debe a que las prácticas docentes no le brindan al educando las herramientas necesarias para que logre dichos nexos. Se hace necesario realizar un cambio en la forma en cómo se están desarrollando los contenidos en el área de matemáticas, que permita darle la transversalidad requerida y propuesta por los estándares básicos de competencias y así lograr mejores resultados académicos.

Aunque es claro que es necesario modificar todo el plan de estudios de la institución, se requiere por ahora una pronta solución a la problemática observada respecto a temas relacionados con las magnitudes y las relaciones entre ellas, en particular el análisis de la relación de proporcionalidad dado que este tema no solamente está relacionado con el pensamiento numérico y la variación sino que es trasversal a la geometría y la medición y es muy importante para trabajar aplicaciones en otras áreas.

Por tal motivo se propone realizar una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad, en el grado séptimo de la Institución Educativa Departamental San Miguel, a través de un planeamiento transversal con otras áreas del conocimiento.

1. ASPECTOS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICOS

1.1. DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL[1]

El concepto de proporción ha estado presente desde tiempos antiguos en la historia de la humanidad y muestra de esto son los relatos de historiadores como Plinio (siglo I d. C.) y Diógenes Laercio (Siglos II y III d. C.), quienes atribuyen al matemático Tales de Mileto haber calculado de manera ingeniosa la altura de la pirámide de Keops, alrededor del año 585 a. C, estableciendo la relación existente entre la longitud de las alturas y las sombras proyectadas por su cuerpo y la pirámide respectivamente. Según los relatos, Tales dibujó en la arena un círculo con un radio igual a su propia estatura y se ubicó en el centro, esperando a que su sombra tocara la circunferencia, es decir, cuando la longitud de la sombra fue igual a su estatura. En ese instante midió la sombra de la pirámide, pues sabía que era el momento en el que coincidiría con la altura, debido a la proporción que guardan. Hoy en día conocemos estos grandes aportes como el teorema de Tales.

> *Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.*[2]

El estudio de relaciones de proporcionalidad también fue muy importante para la Escuela Pitagórica y debido a eso lograron establecer la existencia de magnitudes conmensurables e inconmensurables, trabajos que darían paso a lo que en la actualidad conocemos como números racionales e irracionales. Los pitagóricos a pesar de no tener una simbología para expresar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno, si lograron establecer la relación existente entre la longitud

[1] Este apartado está basado en PARRA, F. ÁVILA, R. y otros (2013).
[2] Proposición 2 del libro VI de los Elementos de Euclides.

de la diagonal de un cuadrado y la longitud de su lado a través de un razonamiento proporcional.

Lo realizado por los pitagóricos llevó a Eudoxio a escribir su teoría de las proporciones, como se puede observar en uno de libros más importantes de la humanidad y por supuesto de la matemática, los *Elementos* de Euclides, en el cual se encuentra de manera explícita la definición de razón y proporción.

> *Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*[3]
>
> *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y cogidos en el orden correspondiente.*[4]

Hoy en día la idea de razón, en una gran cantidad de textos escolares, está ligada con el cociente indicado entre dos magnitudes, definición que puede traer complicaciones por la forma de simbolizarlas y el hecho de no establecer la diferencia con las fracciones, asunto que se analizará más detalladamente en el capítulo 3 (Aspectos didácticos). A continuación se hará un recorrido por algunas disciplinas donde el hombre, a través de la historia, ha resuelto diversos problemas con la ayuda del razonamiento proporcional. Lo anterior con el fin de orientar la propuesta didáctica hacia el objetivo principal, el cual es proporcionarle la transversalidad requerida y establecida en los estándares básicos de competencias, al concepto de proporcionalidad en la Institución Educativa Departamental San Miguel.

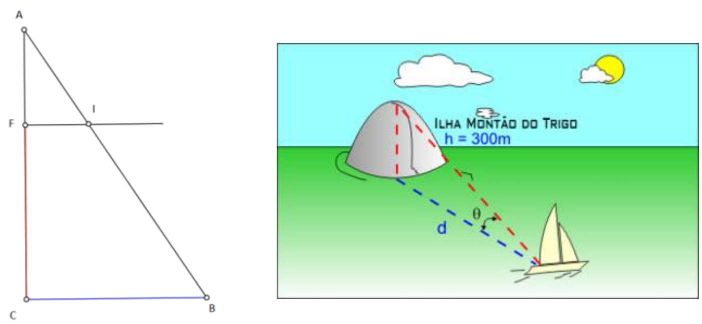
[3] Definición 3 del libro V de los *Elementos* de Euclides.
[4] Definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides.

1.2. LA PROPORCIONALIDAD EN LA MATEMÁTICA.

La permanente necesidad de la humanidad de resolver problemas de su entorno, permitió que surgiera el concepto de proporción. Dichos problemas fueron en sus principios modelados geométricamente por grandes matemáticos como Tales de Mileto siglo V a. C, el cual logró aportar a la solución de diferentes situaciones, alguna de ellas ya mencionadas en el apartado anterior. No obstante, dichas soluciones no hubieran sido posibles de no hacer un análisis métrico de las relaciones establecidas en dichos problemas. En general la aparición de nuevos conceptos y en especial los conceptos científicos se reducen a tres tipos básicos como lo establece MOSTERÍN, J. (2014): los conceptos clasificatorios, los comparativos y los métricos. De esta manera, por ejemplo, se puede observar la estatura de dos personas y saber cuál es más alta que la otra (Concepto comparativo). Pero se requiere de los conceptos métricos para establecer que tanto es más alta que la otra persona. Un concepto métrico es un homomorfismo entre un sistema empírico y un sistema numérico, el cual puede expresarse en varias escalas[5], características que corresponde evidentemente a la práctica científica. Una de las escalas establecidas por MOSTERÍN, se denomina escala proporcional, la cual es de vital importancia pues no solo suministra información para determinar si un objeto es más, o menos, que otro con respecto a alguna característica, sino que señala en qué proporción exacta el uno es más, o menos, eso que el otro. Un ejemplo de escalas proporcionales, correspondientes a conceptos básicos, son la masa, la longitud o tiempo, entre otros.

Otro de los problemas clásicos atribuidos a Tales de Mileto, fue haber calculado la distancia de una nave a la costa con ayuda de un razonamiento proporcional.

Figura 1-1: Modelación geométrica del problema clásico resuelto por Tales[6].



[5] MOSTERÍN, J. (2014). Un concepto métrico puede expresarse en escalas ordinales, proporcionales y de intervalos.

[6] Imagen tomada de http://theodolite-abp-gd.blogspot.com/2006/09/b-d-teoidoo.html.

Aunque no es totalmente claro la forma en la cual Tales logró hacerlo, la suposición más probable[7] es que si la nave o barco se encontraba en el punto B, Tales se habría subido a un faro CF que se encontraba en la orilla de la costa, con un aparato formado por dos listones en ángulo recto. Al colocar uno de ellos FA, vertical en línea recta con CF, y el otro paralelo a CB, lanzaría una visual desde A hacia el barco, la cual determinaría el punto de intersección I con el listón paralelo a CB. Debido a que conocía la altura del faro y las longitudes los listones, por semejanza de los triángulos AFI y ACB pudo determinar la distancia $CB = (CF + FA) \cdot \frac{FI}{FA}$.

También se conoce que los pitagóricos por su concepción del mundo a cada relación entre magnitudes le asociaban una relación entre números, es decir, si por ejemplo tenemos dos segmentos A y B, a la relación entre ellos le debería corresponder una relación entre números naturales.

$$A:B \longrightarrow n:m$$

El problema radicó en encontrar los números n y m. Cuando las magnitudes son **conmensurables** existe una unidad de comparación (medida) U y así $A = nU$ y $B = mU$, con lo cual se soluciona el problema. Pero como es bien sabido, encontraron magnitudes **inconmensurables** como la diagonal de un cuadrado con respecto a su lado, lo que impedía que pudieran encontrar la razón numérica esperada. Para resolver el problema fue necesario la teoría de las proporciones en la cual se podía comparar cualquier par de magnitudes numéricas por medio de ciertas estrategias, en cualquier situación. Por ejemplo si tengo los cuadrados C_1 y C_2 con sus respectivas diagonales d_1 y d_2 y lados l_1 y l_2 ellos podían demostrar que $d_1 : d_2 :: l_1 : l_2$, lo cual se lee, d_1 es a d_2 como l_1 es l_2, evitando de esta manera los números que hoy llamamos **irracionales**, en este caso $\sqrt{2}$.

También demuestran que la razón (relación) entre el perímetro y el diámetro de un círculo es la misma indiferentemente de los círculos establecidos y hallan la proporción $P_1 : P_2 :: d_1 : d_2$, donde P_1 y P_2 son los perímetros del círculo y d_1 y d_2 sus respectivos diámetros. Como bien se sabe esta proporción esconde al número π.

[7] Basado en Peralta, J. Centro Virtual de divulgación de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid. Rescatado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3372%3Athales-de-mileto-624-ac-547-ac&catid=37%3Abiograf-de-matemcos-ilustres&Itemid=33&limitstart=2

Los hallazgos referidos llevaron a Eudoxo a realizar su teoría de las proporciones que constituyen el libro V de los *Elementos* de Euclides. De este libro se escogieron algunas definiciones, entendiendo que son claves en la teoría de las proporciones y que luego serán adaptadas por varios autores a la matemática contemporánea, lo cual se verá en el capítulo 2 sobre los aspectos disciplinares.

En problema de la notación $\frac{A}{B}$ expresada como cociente, que se usa actualmente trae problemas para lo que se pretende, porque una proporción se convierte en una igualdad entre cocientes de números y se pierde el concepto de **relación (razón) entre magnitudes**. De esto se tratará más específicamente en el capítulo 3 cuando se hable de los obstáculos epistemológicos en la enseñanza de las proporciones.

1.3. LA PROPORCIONALIDAD EN LA FÍSICA.

Como lo dicen en su estudio PARRA, F. ÁVILA, R. y otros (2013), grandes aportes se han realizado en la física con ayuda del concepto de proporción, Galileo por ejemplo, establece la relación entre la longitud (h) y el tiempo (x) de caída de un cuerpo, lo que arrojaría una proporcionalidad directa cuadrática de la forma $h = kx^2$. Kepler en 1618 encontraría que *para cualquier planeta, el cuadrado de su periodo orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica*. Lo que se conoce en la actualidad como la tercera ley de Kepler y nos permite saber a qué distancia se encuentra un planeta del sol, si conocemos el tiempo en que tarda el planeta en orbitarlo.

Ya en el siglo XVII con el desarrollo del cálculo diferencial, Newton establece sus leyes del movimiento, determinando una relación proporcional entre fuerza y variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo. Dicho de otra forma, la fuerza es directamente proporcional a la masa y a la aceleración de un cuerpo. El mismo Newton determinó la ley de gravitación universal la cual afirma que la fuerza de atracción que experimentan dos cuerpos dotados de masa es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

1.4. LA PROPORCIONALIDAD EN EL ARTE Y LA ARQUITECTURA.

La proporcionalidad es una cualidad percibida por el ser humano en la naturaleza, que se puede describir a través de expresiones matemáticas, la cual evoca nociones de belleza, orden y armonía.[8] A través de un experimento, en el cual se le dio a escoger a centenares de personas diferentes rectángulos para que seleccionaran el más agradable para la vista, Fechener (1876) comprobó que la mayoría de las personas preferían aquellos cuya razón entre los lados era 34/21, valor que difiere en una cantidad casi despreciable al que Luca Pacioli denominó *divina proporción*, también considerada como *sección aurea*, por Leonardo da Vinci, o *sección divina* por Kepler. Este número irracional surgió de la relación existente entre la diagonal y el lado de un pentágono regular[9] y en la actualidad se representa con el símbolo o letra griega (*phi*) ϕ (en honor al escultor griego Fidas 490 a.C. – 423 a.C.).

La sección aurea aparece al dividir un segmento en media y extrema razón. Si consideramos un segmento AB y un punto P en el interior que divida al segmento AB en AP y PB de tal forma que el segmento mayor AP es al menor PB, como el todo AB, es al mayor AP, obtendremos la *divina proporción* $\frac{AP}{PB}=\frac{AB}{AP}$ la cual se puede expresar como $\frac{AP}{PB}=\frac{AP+PB}{AP}$.

Figura 1-2: Segmento dividido en media y extrema razón.

Solo existe un punto P que satisface esa condición. Si llamamos a la distancia $AP=x$ y $PB=1$ obtenemos $x^2=x+1$ y resolviendo la ecuación cuadrática se tendrá la solución positiva $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618\ldots$

Una forma de obtener la proporción áurea es construir un segmento AB y una perpendicular que pase por el punto B. Sobre la perpendicular ubicar un punto D

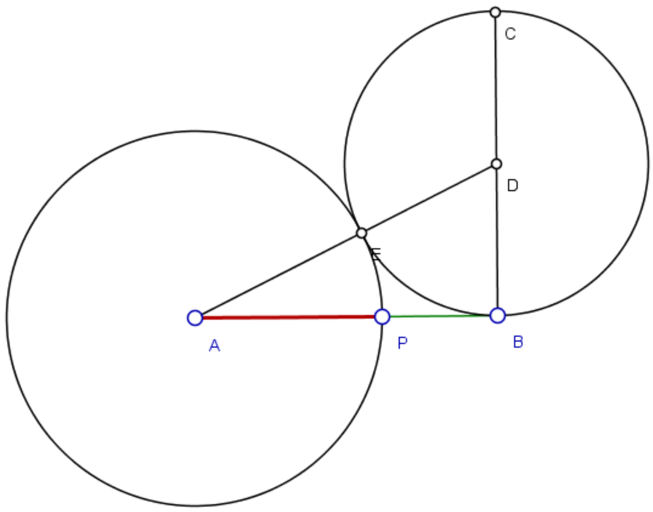
---

[8] Doczi, Gyorgy, El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura, trd. de Alejandra Vucetich, Buenos Aries, Troquel, 2004, pp. 1 y 8.

[9] Se desconoce el origen exacto de donde surgió, se dice que los egipcios descubrieron la proporción tratando de dividir la tierra en forma exacta, pero fue en el Libro XIII de Euclides en donde se estudian los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, que se demuestra la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado, considerada hoy en día como la razón aurea.

que esté a una distancia $\frac{AB}{2}$ del punto B. Con centro en D y radio BD trazar una circunferencia que interseque al segmento AD en el punto E. Finalmente con centro en A y radio AE se traza una circunferencia que que inteseque al segmento AB en el punto P.[10] Este problema de dividir un segmento en media y extrema razón fue resuelto por Euclides en la proposición 30 del libro VI de los *Elementos*.

Figura 1-3: Construcción de un segmento en extrema y media razón.



Tanto en la arquitectura como en el arte la humanidad se ha cuestionado sobre cuáles son las medidas que permiten que una obra sea más armoniosa a la vista, siendo la razón áurea aquella que responde a estos parámetros. Por tal motivo aparece en diversas obras arquitectónicas, aunque en algunas se desconoce si la proporción fue incluida de manera voluntaria. Ejemplos de estas obras son: el Stonehenge, monumento megalítico ubicado en el Reino Unido; el Zigurat de Ur el cual es una torre formada por terrazas, característico de la arquitectura mesopotámica; las pirámides mexicanas de Teotihuacán; las fachadas del Coliseo Romano; del Partenón de la Acrópolis de Atenas, también de catedrales como Nótre Dame de París, e incluso en construcciones modernas como el Palacio de Cristal, sede de las naciones unidas en New York, entre otras[11].

[10] Construcción basada en el trabajo Sección Aurea en Arte, Arquitectura y Música de Yolanda Toledo Agüero. http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf

[11] Basado en el trabajo Sección Aurea en Arte, Arquitectura y Música de Yolanda Toledo Agüero. http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf

Figura 1-4: Plano y fachada del Partenón y pintura de Piet Mondrian[12].

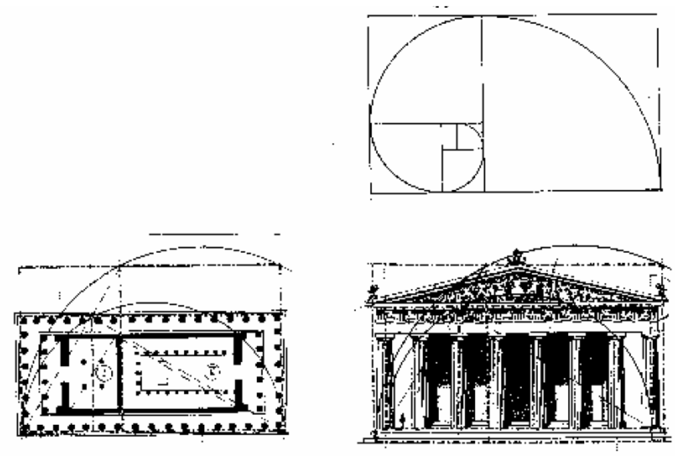
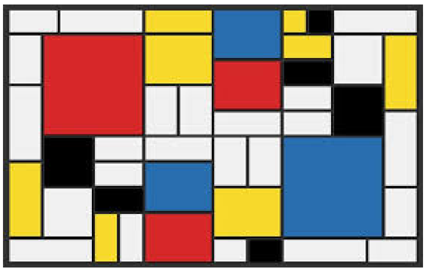


Figura 1-5: Ilustración realizada en el estilo neoplasticista de Piet Mondrian.



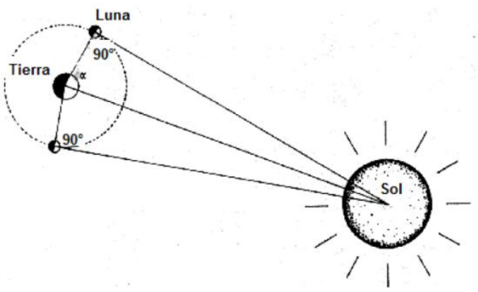
1.5. LA PROPORCIONALIDAD EN LA ASTRONOMÍA

En tiempos antiguos grandes astrónomos utilizaron sus conocimientos sobre la proporcionalidad, para realizar conjeturas acerca de la Tierra, el Sol, la Luna y las estrellas. Un ejemplo de esto fue Aristarco 260 a. C. quien estimó la distancia que hay entre la Tierra y el Sol, así como también la distancia que existe entre la Tierra y la Luna, basándose en el hecho de que la dirección Tierra-Luna y Luna-Sol forma un ángulo de 90º cuando la Luna está en cuarto creciente o en cuarto menguante. Aristarco calculó el ángulo α (Figura 1-5)[13] que forma la dirección Tierra-Sol y Tierra-Luna en 87º y utilizando estos valores conjeturó que la distancia de la Tierra al Sol era 19 veces mayor a la distancia de la Tierra a la Luna.

[12] Tomado de http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf

[13] Figura tomada de HOLGUÍN, E. (2012).

Figura 1-5: Diagrama de la distancia de la tierra al sol, calculada por Aristarco.



En la actualidad conocemos que la distancia de la Tierra al Sol es 400 veces mayor que de la Tierra a la Luna, pero su trabajo es muy valorado dados los pocos recursos tecnológicos con los que se contaban en la época. El problema estuvo en el cálculo del ángulo α.

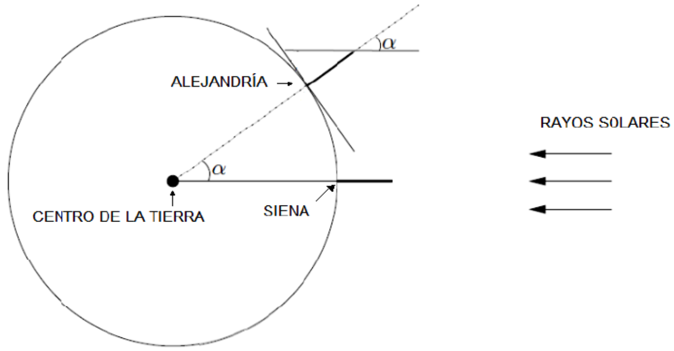
El trabajo realizado por Aristarco sirvió de base para trabajos posteriores como el de Eratóstenes (275-195 a.C.), quien se cuestionaba sobre el diámetro de la Tierra. La historia dice que se basó en unos escritos encontrados en la biblioteca de Alejandría, que contenían unas mediciones realizadas al medio día en el solsticio de verano en la ciudad de Siena (Actual Assuán), a una vara clavada en la tierra y el hecho de que esta no produjera sombra alguna. Eratóstenes observaba que en las mismas condiciones en la ciudad de Alejandría, la vara si producía una sombra la cual formaba un ángulo de 7º 12' con la vertical, así que fundado en hipótesis como: Alejandría y Siena se encontraban en el mismo meridiano; los rayos del Sol llagaban a la Tierra de forma paralela; la distancia entre Siena y Alejandría se estimaba en 5000 estadios es decir aproximadamente 7900 km; y las líneas que cortan las rectas paralelas forman ángulos correspondientes congruentes, pudo afirmar que la tierra no era plana sino redonda[14] , pues de no ser así no habría diferencia alguna entre los ángulos de las sombras proyectadas por las varas.

Con lo realizado en este estudio, también pudo predecir la longitud del radio de la tierra en 6271 km, y la longitud de la circunferencia en 39000 km, utilizando la distancia conocida entre las ciudades y el ángulo de la sombra proyectado por la vara con respecto a la vertical, (el cuál es una cincuentava parte del meridiano terrestre o circunferencia de la tierra). (Figura 1-6)[15].

[14] Es muy valioso el hecho que en los estudios de la época se estableciera la forma redonda de la Tierra si se tiene en cuenta que a mediados del siglo XV d.C. la humanidad seguía pensando en la Tierra como forma plana.

[15] Figura tomada de HOLGUÍN, E. (2012).

Figura 1-6: Diagrama del diámetro de la tierra calculado por Eratóstenes.



Los estudios realizados por Eratóstenes fueron muy acertados considerando que en la actualidad con toda la tecnología de la época se ha establecido el radio de la tierra en 6366 km y la longitud de la circunferencia en 40000 km.

1.6. LA PROPORCIONALIDAD EN LA MÚSICA

En el presente estudio no profundizaré en la relación existente entre la proporcionalidad y la música debido a que en la actualidad la Institución Educativa Departamental San Miguel no cuenta dentro de su plan de estudios con una asignatura de música, ni con una maestro especializado en este arte, que permita realizar una transversalidad adecuada para la enseñanza de este concepto. Sin embargo se hará mención de algunos aspectos relevantes.

Los pitagóricos en la antigua Grecia consideraban que todo era número o relaciones entre números y esto se reflejaba también en la música y en lo que hoy conocemos como la armonía pitagórica. Para ellos, la armonía era la proporción entre las partes de un todo y por lo tanto la música debía ser reducida a las proporciones más simples. Los historiadores sostienen que Pitágoras descubrió la resonancia que tiene una cuerda al tensarse y los acordes en diferentes fracciones de la misma, reafirmando su convicción más profunda que todo era número o relaciones entre ellos, como en este caso de la música con los números.

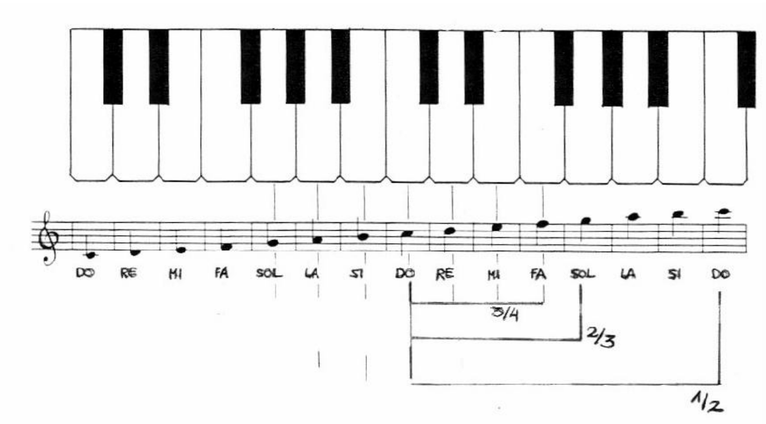
> *Según la leyenda, Pitágoras descubrió la armonía al escuchar el sonido de martillos provenientes de diferentes yunques en el taller de un herrero. El peso de estos martillos se correspondía con los números 12, 9, 8, 6; el peso del cuarto martillo daría el tono, y el del primer martillo, que era el doble del menor, daba la octava. El*

> *peso de los otros dos, que son las medias aritmética y armónica de los dos anteriores darían la quinta y la cuarta. Llevadas estas proporciones a un monocordio vemos que el tono o nota base lo da el sonido de la cuerda entera, es lo que se llamaba unísono, si la cuerda tiene la mitad de la longitud original suena una octava más alta que la anterior, la proporción 1/2, que produce el mismo sonido que la cuerda entera solo que más agudo se llama octava (DO-DO) porque se llega a él a través de ocho intervalos de la escala, ocho notas, ocho teclas blancas del teclado; a esta proporción llamaban los griegos diapasón. Si su longitud son 2/3 de la primera, la cuerda emite la quinta de la nota base, la proporción 2/3 se llamó diapente, denominada hoy quinta (DO-SOL) pues se llega a ella a través de cinco intervalos. Por último, si su longitud son 3/4 de la primitiva, la nota que suena es la cuarta de la base, a la proporción 3/4 se le llamó diatésaron, conocida ahora como cuarta (DO-FA) con cuatro intervalos.* (Sección Aurea en Arte, Arquitectura y Música; Yolanda Toledo Agüero)

El sonido de un piano se da al golpear unas cuerdas con unos martillos, activados por unas teclas ya sean blancas o negras. La longitud de las cuerdas está dada de tal manera que entre más cortas, más alto es el sonido que generan y se cumplen las proporciones mencionadas por Toledo.

Se puede observar la estrecha relación que existe entre las escalas musicales que se manejan en la actualidad con el trabajo propio de la escuela pitagórica y su relación con la forma en que concebían el mundo y las matemáticas.

Figura 1-7: Teclado de un piano.



2. ASPECTOS DISCIPLINARES

Para realizar una propuesta didáctica que contribuya al desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes, es necesario establecer el marco disciplinario que de sustento a lo planteado y permita la obtención del objetivo.

En este capítulo se realizarán las definiciones de magnitud, razón, proporción, así como sus principales propiedades y algunos teoremas importantes para el desarrollo de la propuesta didáctica. Teniendo en cuenta que la propuesta incluye aplicaciones de la proporcionalidad en geometría, se finaliza con algunas definiciones y teoremas de la semejanza de triángulos.

2.1. TEORÍA DE LAS PROPORCIONES

2.1.1. MAGNITUD

Para efectos de este trabajo se denomina **magnitud** a la cualidad de un objeto a la que se le puede asignar una medida. El tiempo, la masa, la temperatura o la longitud son ejemplos de magnitudes[16].

2.1.2. RAZÓN

Se denomina **razón** a cierta **relación** (usualmente de comparación) entre dos magnitudes. Las magnitudes pueden ser del mismo tipo, por ejemplo cuando se relacionan la diagonal de un cuadrado con su respectivo lado y se llaman magnitudes homogéneas; o de diferente tipo, cuando por ejemplo relacionamos el espacio recorrido y el tiempo utilizado por un móvil desde un cierto punto y se llaman magnitudes heterogéneas. La razón entre las magnitudes A y B se expresa de la forma $A:B$ o $\frac{A}{B}$ y se lee A es a B.

A y B se llaman términos de la razón. El primero (A) se llama **antecedente** y el segundo (B) **consecuente**.

Nota: con las definiciones (2.1.1.) y (2.1.2.) dado que toda magnitud por definición es medible con frecuencia confunden las magnitudes que se relacionan con sus

[16] Para una definición formal de magnitud se puede consultar SANCHEZ, F. (2012, pp 21-27).

respectivas medidas y por eso el problema del razonamiento proporcional termina siendo un problema de razonamiento entre números. Y como una razón numérica es una relación entre números usualmente se trata como el cociente entre ellos, lo cual a veces trae problemas como se expondrá en el capítulo 3 (Aspectos didácticos).

2.1.3. PROPIEDADES DE LAS RAZONES

Se presenta a continuación algunas propiedades de las razones trabajadas en el libro de MEJÍA, F. (2009) las cuales fueron adaptadas a las necesidades del presente trabajo, tratando de ser cuidadosos con la notación establecida, con el fin de no presentar confusiones de la razón entre magnitudes y el cociente indicado que se puede expresar de dicha relación. Se escogen éstas por ser las más relevantes para la propuesta que aquí se presenta.

2.1.3.1. Propiedad: Sean A y B dos magnitudes, a las cuales por medio de un proceso de medida se les asignan los números n y m respectivamente, $n, m \in IR$. Así a la razón $A{:}B$ se le asigna la razón numérica $\frac{n}{m}\cdot$ Es decir se establece una correspondencia que $A{:}B \longrightarrow \frac{n}{m} = k$, con $k \in IR$.

2.1.3.2. Propiedad: El valor de una razón no se altera, si el antecedente y el consecuente se multiplican o dividen por la misma cantidad k $(k \in IR)$. Esto es si $\frac{A}{B}$ es una razón y $k \in IR$ con $k \neq 0$, entonces $\frac{A}{B} = \frac{kA}{kB}\cdot$

2.1.4. PROPORCIÓN

Proporción es la igualdad de dos razones; cuando dos razones son iguales se dice que las cuatro cantidades que las componen son **proporcionales**. Así: si A, B, C y D son magnitudes y se cumple que $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, se dice que las magnitudes A, B, C y D son proporcionales. Evidentemente a las propiedades entre magnitudes se les puede hacer corresponder una respectiva propiedad entre números reales.

Esto es si a la razón $\frac{A}{B}$ se le asigna la razón entre números $\frac{n}{m}$ y a $\frac{C}{D}$ se le asigna la razón entre números $\frac{p}{q}$, con n, m, p y $q \in IR$, se tiene que: $\frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, Entonces las cantidades $n, \mathrm{m}, \mathrm{p}$ y q resultan proporcionales y los términos n y q se llaman **extremos** y m y p se llaman **medios**.

2.1.5. PROPIEDADES Y TEOREMAS DE LAS PROPORCIONES

A continuación se expondrán las propiedades más relevantes de las proporciones para el objetivo de este trabajo.

2.1.5.1. Propiedad fundamental: Si cuatro cantidades forman una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Efectivamente si a, b, c y d son cantidades proporcionales, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y por propiedades de la estructura algebraica de los números reales se tiene que $ad = bc$.

Esta propiedad es de vital importancia en el desarrollo de la propuesta didáctica, debido a que de esta se deduce que si se conocen tres términos cualesquiera de una proporción, puede encontrarse el cuarto. Por ejemplo sí 4, 8, 12 y x, forman la proporción $\frac{4}{8} = \frac{12}{x}$, el término x se puede hallar aplicando la propiedad anterior que nos lleva a que $4x = 96$ y por lo tanto $x = \frac{96}{4}$. Luego $x = 24$.

La propiedad anterior puede ser generalizada[17] a dos secuencias de números positivos $a, b, c, \dots$; $a', b', c', \dots$. Si se cumple que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \cdots$ decimos que las dos **secuencias son proporcionales** y lo notaremos $a, b, c, \dots \sim a', b', c', \dots$.

La razón constante $k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \cdots$ se llama **constante de proporcionalidad**. Nótese que la relación entre secuencias es una relación simétrica, pero la constante de proporcionalidad depende del orden en el que sean consideradas. Ya que la constante de proporcionalidad $k' = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \cdots$ es justamente el recíproco de k esto es $k' = \frac{1}{k}$ ·

2.1.5.2. Definición: Varias cantidades están en **proporción continua** cuando la primera es a la segunda como la segunda es a la tercera, como la tercera es a la cuarta y así sucesivamente. Es decir, $a, b, c, d, \dots$. están en proporción continua si:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \cdots$$

[17] MOISE, E. (1963, pp 142).

De esta propiedad se deduce que si tres cantidades forman una proporción continua $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ entonces $ac=b^2$. En este caso se dice que b es **media proporcional** entre a y c y c es **tercera proporcional** de a y b.

2.1.5.3. Teorema 1: Si tres cantidades forman una proporción continua, la razón de la primera a la tercera es igual a la razón de la primera a la segunda al cuadrado.

En otras palabras, si a, b y c son tres cantidades en proporción continua entonces $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

Demostración: si a, b y c son tres cantidades en proporción continua entonces por definición se tiene que $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, pero como $\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{c}\right)\left(\frac{b}{b}\right)$, con c y $b\neq 0$, entonces $\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)$, pero $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ por hipótesis, luego $\frac{a}{c}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$, y por lo tanto $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

2.1.5.4. Teorema 2: Dadas dos proporciones diferentes se puede obtener una sola relacionada con las anteriores. En otras palabras:

Dadas las proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ se tiene que $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$.

Demostración: Como $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ multiplicando miembro a miembro se tiene

$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{g}{h}\right)$ y por lo tanto $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$.

2.1.5.5. Corolario: Dadas las siguientes proporciones $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{b}{x}=\frac{d}{y}$ se deduce que $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$.

Demostración: Por el teorema anterior se tiene que $\frac{ab}{bx}=\frac{cd}{dy}$ y por lo tanto $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$.

2.1.5.6. Propiedad Invertendo[18]

Teorema 3: Dada una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ésta no varía si se invierte el antecedente y el consecuente de la primera razón, así como el antecedente

[18] El nombre de estas propiedades se conocen por la denominaciones latinas tomadas de la geometría de Euclides por MEJÍA, F. (2009).

y el consecuente de la segunda. La nueva proporción obtenida $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ se denomina **invertendo.**

Prueba: Evidentemente dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se tiene que $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ por las propiedades algebraicas de los números reales. Más precisamente si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; entonces $ad = bc$, luego por conmutatividad $da = cb$, por lo tanto por la propiedad fundamental se tiene que $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; y por propiedades de la igualdad $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

2.1.5.7. Propiedad Alternando

Teorema 4: Dada una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, esta no varía si se intercambian el consecuente de la primera razón con el antecedente de la segunda. La nueva proporción $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ obtenida se llama **alternando**.

Prueba: Dada $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $a = \frac{bc}{d}$ y por lo tanto $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

2.1.5.8. Propiedad Componendo

Teorema 5: En una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente. En otras palabras si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$. Esta nueva proporción se denomina **componendo**.

Prueba: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ y por tanto $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$ es decir $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ usando las propiedades algebraicas de los números reales.

2.1.5.9. Propiedad dividendo

Teorema 6: En una proporción la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la primera razón es a su consecuente como la diferencia entre el antecedente y el consecuente de la segunda razón es a su consecuente. En otras palabras si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$. Esta nueva proporción obtenida se denomina **dividendo**.

Prueba: Sea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple que $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, usando un razonamiento análogo al de la propiedad anterior.

2.1.5.10. Propiedad componendo y dividendo

Teorema 7: En una proporción la suma del antecedente y el consecuente de la primera razón es la diferencia de los mismos, como la suma del antecedente y el consecuente de la segunda razón es a la diferencia de los mismos. En otras palabras si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ · La nueva proporción obtenida se llama **componendo y dividendo**.

Prueba: Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ aplicando los dos teoremas anteriores se tiene que

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (1)$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad (2)$$

Al dividir la (1) por la (2) $\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$ se obtiene $\frac{b(a+b)}{b(a-b)}=\frac{d(c+d)}{d(c-d)}$ y por lo tanto $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ·

2.1.6. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Sean A y B dos magnitudes que toman valores diferentes. Supongamos que A toma los valores $a_1,\ a_{2,}\ a_3,\dots,a_n$ y B los valores $b_1,\ b_{2,}\ b_3,\dots,b_n$decimos que A y B son **directamente proporcionales**[19] si y solo si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ Evidentemente si se cumple lo anterior, y $\frac{a_i}{b_i}=k,\ 1\leq i\leq n,\ n\in\mathbb{N}\ y\ k\in IR$ se tiene que $a_i=kb_i$ para todo i. Esto es, los valores que toma la magnitud A son iguales a los valores que toma la magnitud B multiplicados por una constante.

Por ejemplo, supongamos que la magnitud A es el lado de un cuadrado y la magnitud B es su perímetro. Claramente A y B son directamente proporcionales pues para cualquier valor a de A (longitud del lado) se tiene que su perímetro p es $4a$. Igualmente sucedería si consideramos a B como la diagonal del cuadrado, pues sabemos que si tomamos un valor cualquiera d para la diagonal se tiene que $d=\sqrt{2}\,a$.

2.1.7. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Una magnitud A que toma los valores $a_1,\ a_{2,}\ a_3,\dots,a_n$ se dice **inversamente proporcional** a la magnitud B que toma los valores $b_1,\ b_{2,}\ b_3,\dots,b_n$ cuando los

[19] Esta propiedad en el texto de MEJIA, F (2009) se expresa como si A varía proporcionalmente a B entonces A es igual a B multiplicada por una cantidad constante.

valores de A son directamente proporcionales a los inversos multiplicativos de los valores de B[20]. En otras palabras $a_i = k\frac{1}{b_i}$ siendo, $1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}\ y\ k \in IR$.

Un ejemplo típico de proporción inversa se tiene cuando se relaciona para una obra el número de trabajadores necesarios, con respecto al tiempo que tardaría la obra en ser culminada.

2.2. PROPORCIONALIDAD EN GEOMETRÍA[21]

Como se ha mencionado anteriormente la proporcionalidad surge de la necesidad del ser humano de resolver problemas cotidianos de su entorno, los cuales con frecuencia son modelados geométricamente. En la secuencia didáctica se encontrarán algunos problemas clásicos los cuales se desarrollan a partir de un pensamiento geométrico y métrico y por tal motivo se hace necesario establecer explícitamente el uso de la teoría de las proporciones en geometría para hallar **figuras semejantes**, como es el caso de triángulos semejantes o en general de polígonos semejantes. Nos interesa destacar algunos de los teoremas más relevantes para nuestros objetivos en función de sus aplicaciones. Por lo anterior nos limitaremos a enunciarlos siguiendo el estilo de Euclides en sus *Elementos*, esto es dar un enunciado general en lenguaje ordinario realizar la figura correspondiente y enunciar de nuevo el teorema a partir de la figura dada. Las demostraciones rigurosas se pueden encontrar en los *Elementos* de Euclides o en GUERRERO, A.B. (2002). Demostraciones informales con objetivos didácticos pueden consultarse por ejemplo en BRUÑO, G.M. (1960) o en ÁLVAREZ, E. (2012).

2.2.1. SEGMENTOS PROPORCIONALES

Entendemos por **razón de dos segmentos** $A\ y\ B$ a la razón de los números que expresan las longitudes de estos segmentos, cuando han sido medidos con la misma unidad. Es decir $A{:}B = \frac{a}{b}$ ·

[20] Lo que MEJIA, F. (2009) expresa diciendo: una magnitud varía inversamente proporcional a otra cuando varía directamente proporcional a su recíproca. Es decir, A varía inversamente proporcional a B si se cumple que $A = K\left(\frac{1}{B}\right)$, de donde $A = \frac{K}{B}$.

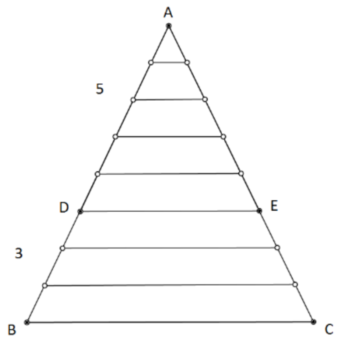
[21] Las definiciones, propiedades y teoremas de este apartado son tomados de ÁLVAREZ, E. (2012) y adaptadas según las necesidades de este trabajo.

Dos segmentos son proporcionales cuando la razón entre las dos primeras es igual a la razón de las otras dos. Más precisamente: si A, B, C y D son cuatro segmentos cuyas longitudes están dadas por los números a, b, c y d, decimos que A, B, C y D son proporcionales, esto es $A : B :: C : D$ si solo si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Como con frecuencia los lados de una figura geométrica rectilínea se notan con las letras mayúsculas que marcan sus extremos, por ejemplo AB, en este trabajo seguiremos una notación bastante convencional con la cual $\overline{AB}$ se refiere al segmento propiamente dicho y AB a la medida de este segmento. Las dos notaciones serán usadas según conveniencia en lo que sigue.

2.2.1.1. Teorema 8: Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados segmentos proporcionales.

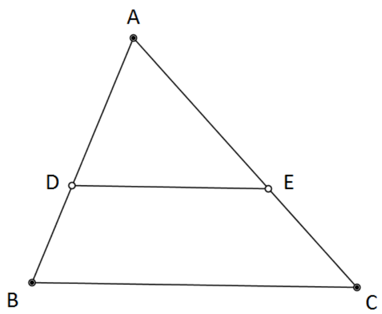
Figura 2-1: Diagrama del teorema 8.



En otras palabras, sea el triángulo $\triangle ABC$ y D , E puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ entonces se tiene que $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$ y por lo tanto $\frac{DA}{DE} = \frac{EA}{EC}$.

2.2.1.2. Teorema 9: Toda recta que determina sobre dos lados de un triángulo segmentos proporcionales es paralela al tercer lado.

Figura 2-2: Diagrama del teorema 9



Sea el triángulo $\triangle ABC$ y sean los puntos D y E puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si se cumple que $\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}$ entonces $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ ⋅ Ciertamente el teorema 9 es el recíproco del teorema 8.

2.2.2. MEDIA PROPORCIONAL

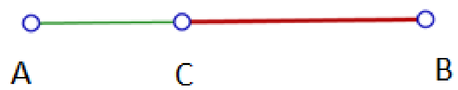
Definición: dados los segmentos $\overline{XY}, \overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se dice que $\overline{XY}$ es **media proporcional** entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ si $\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{CD}}$. Si además consideramos que sus respectivas mediadas son h, m y n tenemos la respectiva igualdad numérica $\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$ lo cual implica que $h^2 = mn$, luego $h = \sqrt{mn}$.

Cada uno de los otros segmento $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se llaman **tercera proporcional**.

2.2.3. PROPORCIÓN ÁUREA

Un caso particular de una media proporcional se tiene cuando un segmento $\overline{AB}$ se divide en proporción áurea (véase Capítulo 1 numeral 1.4) y un punto C sobre el segmento, este divide al segmento inicial de tal forma que el segmento inicial $\overline{AB}$ sea a la parte mayor $\overline{CB}$ como la parte mayor $\overline{CB}$ es a la parte menor $\overline{AC}$, es decir $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ ⋅

Figura 2-3: Segmento en proporción áurea.



Ahora bien, si consideramos $AC = a$ y $BC = b$ tenemos $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$ ⋅ Luego por la propiedad fundamental de las proporciones tenemos que $a(a+b) = b^2$ es decir $b = \sqrt{a(a+b)}$ y si en particular $AB = 1$, se tiene que $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$ es decir $1 - x = x^2$ y por lo tanto $x^2 + x - 1 = 0$, de donde $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$, luego $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ⋅

El valor de x es conocido como el número áureo φ y tiene múltiples aplicaciones en diferentes campos como la arquitectura, la música y el arte como se mencionó en el Capítulo 1 (Aspectos histórico epistemológicos).

2.2.4. POLÍGONOS SEMEJANTES

Se llaman **polígonos semejantes** a los polígonos que tienen los ángulos respectivamente congruentes y los lados correspondientes proporcionales[22].

Los lados correspondientes en figuras semejantes son aquellos adyacentes a los ángulos respectivamente congruentes.

En los **triángulos semejantes**, generalmente se llaman lados correspondientes a los lados opuestos a los ángulos congruentes.

Se llama **razón de semejanza**, el número que expresa la razón de los lados correspondientes.

2.2.5. TRIÁNGULOS SEMEJANTES

Dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$, satisfacen las siguientes condiciones:

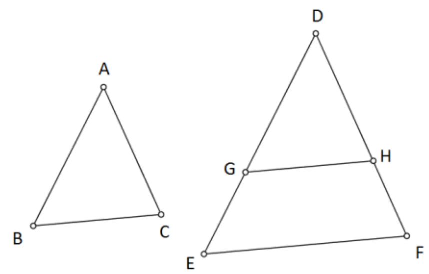
$$\begin{cases} \sphericalangle A \cong \sphericalangle A';\ \sphericalangle B \cong \sphericalangle B';\ \sphericalangle C \cong \sphericalangle C' \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \end{cases}$$

2.2.6. CASOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

2.2.6.1. Caso 1: Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.

[22] Todos los polígonos regulares que tienen el mismo número de lados son semejantes.

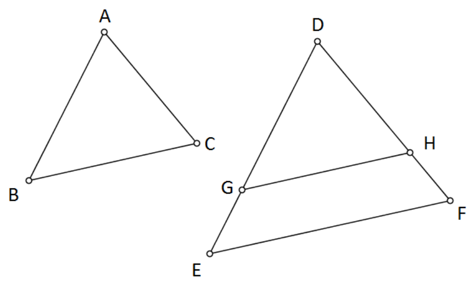
Figura 2-4: Caso 1 de semejanza de triángulos.



En otras palabras, dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ y $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, entonces $\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$.

2.2.6.2. **Caso 2:** Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual comprendido por lados respectivamente proporcionales.

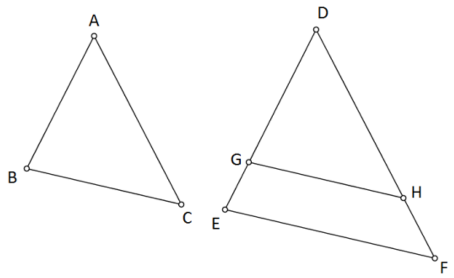
Figura 2-5: Caso 2 de semejanza de triángulos.



En otras palabras dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si $\measuredangle A \cong \measuredangle D$ y $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, entonces **:** $\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$.

2.2.6.3. **Caso 3:** Dos triángulos son semejantes, cuando tienen los tres lados respectivamente proporcionales.

Figura 2-6: Caso 3 de semejanza de triángulos.

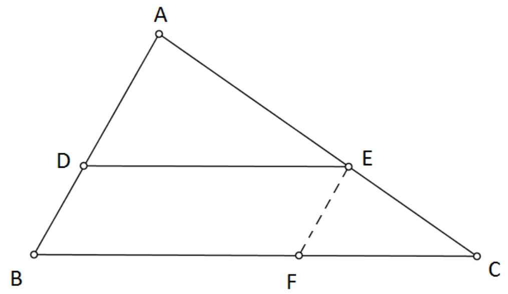


Es decir, dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ si $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

2.2.7. TEOREMA DE THALES

Toda paralela al lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero.

Figura 2-7: Ilustración del teorema de Tales.



En otras palabras dado el triángulo $\triangle ABC$ y los puntos D y E puntos de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ y por lo tanto $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$.

Demostración: Sea el triángulo $\triangle ABC$ y D y E puntos de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Además sea $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ tenemos que:

- Los triángulos $\triangle ADE$ y $\triangle ABC$ tienen sus ángulos respectivamente congruentes debido a que:

  $\sphericalangle A$ es común.
  $\sphericalangle ADE \cong \sphericalangle B$ Correspondientes entre paralelas.
  $\sphericalangle AED \cong \sphericalangle C$ Correspondientes entre paralelas.

- Por el **teorema 8**, los lados son proporcionales debido a que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ por lo cual se tiene que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \qquad (1)$$

- Trazando $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ se tiene:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \qquad (2)$$

Debido a que el cuadrilátero $BFED$ es un paralelogramo, se tiene que $\overline{DE} \cong \overline{BF}$.

Las relaciones (1) y (2) dan como resultado que: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$ y por lo tanto los triángulos $\triangle\, ABC$, $\triangle\, ADE$ y $\triangle\, EFC$ son semejantes.

3. ASPECTOS DIDÁCTICOS

3.1. LA PROPORCIONALIDAD EN EL CURRÍCULO COLOMBIANO

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, en el ciclo sexto-séptimo, contemplan el manejo del razonamiento proporcional desde diferentes pensamientos. En el siguiente cuadro se ilustran las competencias básicas que un estudiante debe adquirir, al culminar su formación en este ciclo.

Tabla 3-1: Estándares básicos de competencias en matemáticas, ciclo sexto-séptimo.

ESTANDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS EN MATEMÁTICAS				
PENSAMIENTO NUMÉRICO	**PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS**	**PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS**	**PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS**	**PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS**
Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variación en medidas. Justifico la pertinencia y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.	Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas)	Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas. Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa.

Por otro lado en los Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales, para el mismo ciclo, se puede vislumbrar la conexión existente entre las diferentes áreas del conocimiento y específicamente con el área de matemáticas, ya que se pretende que los estudiantes logren distintos niveles de argumentación basados, entre otras cosas, en el análisis de datos. Al culminar este ciclo los estudiantes deben alcanzar las siguientes competencias:

- Diseñar y realizar experimentos y verificar el efecto de modificar diversas variables para dar respuestas a preguntas.
- Registrar las observaciones y resultados utilizando esquemas, gráficas y tablas.
- Utilizar las matemáticas como una herramienta para organizar, analizar y presentar datos.
- Comunicar oralmente y por escrito el proceso de indagación y los resultados obtenidos, utilizando gráficas, tablas y ecuaciones aritméticas.

Aunque la relación existente entre las ciencias sociales y las matemáticas no está de manera tan explícita en los Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales, se puede observar la necesidad de entrelazar los conocimientos de dichas áreas, para que los estudiantes logren una comprensión significativa de las temáticas tratadas durante su formación y específicamente en el ciclo sexto-séptimo, el cual es centro de este estudio. Una de las competencias que los estudiantes deben adquirir al concluir este ciclo es:

- Utilizo coordenadas, convenciones y escalas para trabajar con mapas y planos de representación.

Lo anterior permite ver la importancia de la transversalidad de un concepto clave, como lo es el razonamiento proporcional en el ciclo sexo-séptimo, para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes.

3.2. DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Según lo argumenta Godino, J. (2002), el razonamiento proporcional se considera uno de los componentes más importantes en la evolución del pensamiento formal en un adolecente; el desarrollo deficiente de las estructuras conceptuales en esta etapa, afectará la comprensión y el pensamiento cuantitativo en diferentes líneas de la matemática como la geometría y álgebra, incluso en diferentes áreas del conocimiento como la biología, la química y la física. Sin embargo también aclara que la adquisición de las destrezas del razonamiento proporcional, ocurre de manera lenta durante el proceso de formación y que incluso en ocasiones existen personas que nunca logran adquirirlas.

La importancia de un buen desarrollo del razonamiento proporcional en las etapas iniciales de formación también es descrita por Lesh, Post y Behr (1988), los cuales argumentan que es la piedra angular en el desarrollo de la aritmética en los niños e incluso en etapas superiores que se necesita de procesos formales como en el concepto de función.

Lo anterior muestra la importancia de un manejo adecuado del razonamiento proporcional en los estudiantes, en las etapas iniciales de formación y en adolescentes, ya que esto favorece el desarrollo del pensamiento cuantitativo, beneficiando el desempeño del estudiante en diferentes áreas del conocimiento. No obstante, como lo argumenta Gómez, C. (1998), desarrollar el pensamiento proporcional es una situación compleja y requiere de diferentes tipos de estrategias como actividades con comparaciones y trasformaciones, problemas con enunciados verbales y situaciones que involucren valores desconocidos.

En su investigación sugiere la existencia de diferentes factores que pueden afectar el desarrollo adecuado del razonamiento proporcional, como la relación entre los números involucrados, las unidades utilizadas, el tamaño de los números y el contexto del problema. De acuerdo a lo anterior propone incluir situaciones en las que se avance progresivamente, hasta llegar a números cada vez más grandes, usando números naturales en las razones e ir involucrando racionales, todo involucrado en contextos reales en las que puedan desarrollarse conceptos significativos.

3.3. LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN BÁSICA SECUNDARIA

En el desarrollo de esta propuesta didáctica se tendrán en cuenta las definiciones que aparecen en los libros de texto de básica secundaria, con los que cuenta la Institución Educativa Departamental San Miguel, ya que estos son la primera fuente de consulta de los estudiantes del colegio.

En la actualidad la Institución cuenta entre sus libros de texto para matemáticas del grado séptimo, con la Aritmética y Geometría II. (Editorial Santillana 2004) y el Hipertexto matemáticas 7 (Editorial Santillana 2010). Debido a que son de la misma editorial y relativamente cercanos en el año de su edición, las definiciones que allí se presentan son prácticamente las mismas, por lo que se tendrán en cuenta una sola vez para realizar la comparación.

Estos libros realizan las siguientes definiciones a lo largo de la unidad 3 denominada, proporcionalidad y sus aplicaciones.

RAZÓN

El cociente indicado entre dos cantidades a y b, $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$ se denomina la **razón** entre a y b.

Una razón se puede presentar como $\frac{a}{b}$ o como $a: b$, en ambos casos se lee. "la razón de a a b" o "a es a b"

PROPORCIÓN

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.

La proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a: b :: c: d$ y se lee "a es a b como c es a d"

MAGNITUDES DIRECTAMENTE CORRELACIONADAS

Dos magnitudes son **directamente correlacionadas**, cuando al aumentar una de ellas, la otra también aumenta, cuando al disminuir una de ellas la otra también disminuye.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si la razón entre cada medida de una de ellas y la respectiva medida de la otra es igual a una constante.

Si x es la medida de una magnitud A y y la medida de una magnitud B, se dice que A y B son directamente proporcionales si se cumple que $\frac{y}{x} = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

MAGNITUDES INVERSAMNETE CORRELACIONADAS

Dos magnitudes son **inversamente correlacionadas**, cuando al aumentar una de ellas, la otra disminuye.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando el producto de cada medida de una magnitud por la respectiva medida de la otra magnitud es igual a una constante.

Si x es la medida de una magnitud A y y es la medida de una magnitud B, se dice que A y B son inversamente proporcionales si se cumple que: $y \cdot x = k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Como se puede observar la forma en que se trabajan las proporciones en estos libros es totalmente aritmética, lo que ocasiona dificultades en el aprendizaje al no establecer las diferencias entre las fracciones y la notación de las proporciones.

3.4. CONSIDERACIONES SOBRE LOS OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD

Al surgir los conceptos de razón y proporción en contextos esencialmente geométricos y en una época histórica en la cual no se contaba con un conjunto numérico tan amplio y por ende con la simbología para expresarlos, las nociones de razón y proporción se expresaban estrictamente como la comparación entre magnitudes. En la teoría de las proporciones de Eudoxio era ya conocida la inexistencia de una medida común entra la diagonal y el lado de un cuadrado (Figura 3-1) o entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia (Figura 3-2), no obstante lograban realizar comparaciones entre sus medidas, si bien no como relaciones entre números, sí como relaciones entre magnitudes.

Figura 3-1: Relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado.

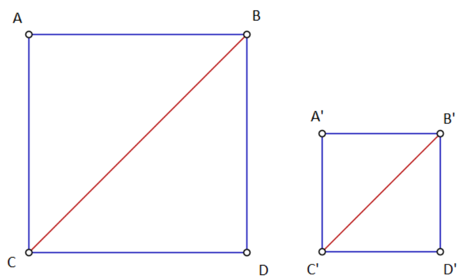
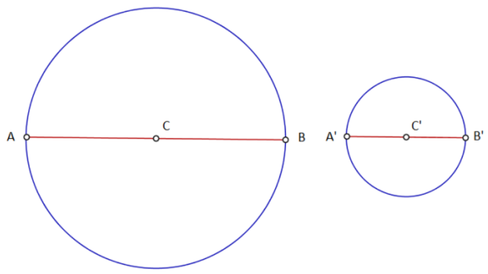


Figura 3-2: Relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia.



En este contexto la simbología $AC\colon A'C' :: BC\colon B'C'$ expresaba la comparación entre los lados de dos cuadrados y sus diagonales (Figura 14) y no la igualdad entre el cociente indicado de sus longitudes, pues en la época no se reconocían las razones como fracciones o números racionales.

No obstante en la actualidad al crecer el conjunto numérico y su respectiva simbología, los conceptos de razón y proporción han quedado relegados, en múltiples libros de texto escolares, al cociente indicado entre dos cantidades $\frac{AC}{A'C'}$ y a la igualdad entre dos razones $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ lo cual genera dificultades en el aprendizaje ya que el término razón no es siempre un sinónimo de fracción. Hoffer, A. (1998)[23] explica de una manera detallada estas diferencias:

> *La idea clave es que las fracciones son cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero; mientras que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes. Cada una de esas cantidades vienen expresadas mediante un número real y una cantidad de medida.*

Lo anterior implica marcadas diferencias entre las fracciones y las razones, lo que es necesario tener en cuenta a la hora de orientar un proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Las razones pueden comparar entre sí objetos heterogéneos, es decir, objetos que tienen diferentes unidades de medida, por ejemplo $30\ km$ por hora, mientras que las fracciones comparan el mismo tipo de objeto como “dos de cinco partes”.

[23] Hoffer, A. (1998). Citado en Godino, J. y Baquero, C. (2002).

- En las razones el segundo componente puede ser cero, por ejemplo en un salón de clases la razón entre los niños y las niñas puede ser de 20:10, pero también puede ser de 30:0, si no hay niñas en el salón, lo cual no se trata de hacer una división por 0.
- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo la razón de la longitud del lado de un cuadrado y su diagonal es $\sqrt{2}$, lo cual es un número irracional.
- Las razones se pueden expresar mediante diversos símbolos y no necesariamente como fracciones. Por ejemplo la razón 5 es a 6, se puede representar $5:6$ o $5 \rightarrow 6$.

3.5. MODELO PEDAGÓGICO ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN[24]

Debido a que la propuesta didáctica para la enseñanza de las proporciones está orientada al grado sétimo de la Institución Educativa Departamental San Miguel, es necesario enmarcarla en el modelo pedagógico adoptado en la misma, el cual es Enseñanza para la Comprensión.

Este modelo pedagógico hace parte de la corriente constructivista, que replantea el rol del docente de una enseñanza tradicional y lo enfoca como un entrenador que guía a los estudiantes al conocimiento y pone como eje central los esfuerzos del educando para construir la comprensión, entendiendo a ésta como la capacidad de usar el propio conocimiento de maneras novedosas. Una pedagogía de la comprensión debe abordar cuatro preguntas clave:

- ¿Qué tópicos vale la pena comprender?
- ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
- ¿Cómo podemos promover la comprensión?
- ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Una forma de responder a estas preguntas abarca un marco de cuatro partes, que da fundamento al modelo pedagógico. Estos elementos son:

[24] Este apartado está hecho con base en STONE, M. (1999).

TÓPICOS GENERATIVOS

En el modelo pedagógico Enseñanza para la Comprensión, es esencial la forma como está organizado el currículo, teniendo en cuenta las necesidades de los estudiantes y su entorno. Debido a esto se hace necesario estructurar los tópicos o temas de manera generativa, entendiendo que el carácter generativo se da cuando éste es central para el dominio o la disciplina, es accesible e interesante para los estudiantes, excita las pasiones intelectuales del docente y se conecta fácilmente con otros tópicos tanto dentro como fuera del dominio o disciplina particular.

METAS DE COMPRENSIÓN

Las metas de comprensión afirman explícitamente lo que se espera que los alumnos lleguen a comprender. Dichas metas toman más fuerza cuando se hacen de manera explícita y pública, tanto para los estudiantes como para los padres de familia y comunidad educativa en general; ya que permite saber hacia dónde va la clase, mostrando los avances y evitando desviarse de la agenda principal. Las metas de comprensión deben centrarse en las ideas, modalidades de indagación y formas de comunicación que son esenciales cuando se quiere que los estudiantes alcancen comprensión en una asignatura específica.

DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN

Uno de los elementos más importantes en el marco conceptual del modelo pedagógico Enseñanza para la Comprensión, son los desempeños de comprensión, pues son éstos, todas las propuestas y actividades que el docente plantea en el aula, para que los estudiantes alcancen las metas de comprensión. Los desempeños que cumplen con este propósito incluyen explicar, interpretar, analizar, relacionar, comparar, y hacer analogías. Para lograr esto se recomienda realizar tres etapas en el proceso de enseñanza.

- Etapa de exploración: Estas actividades ayudan a que los alumnos vean conexiones entre el tópico generativo y sus propios intereses y experiencias previas. Explorar los elementos también puede ofrecer, tanto al docente como a los alumnos, información acerca de lo que los estudiantes ya saben y aquello que están interesados en aprender.

- Investigación guiada: Para realizar una investigación guiada los docentes pueden centrarse en habilidades básicas tales como la observación cuidadosa, el registro preciso de datos, el uso de un vocabulario rico o la síntesis de notas de diferentes fuentes alrededor de una pregunta específica. A medida que el docente avance con sus estudiantes puede proponerles comprender cómo analizar datos empíricos para refinar teorías y así comprometerse en formas más complejas de investigación.
- Proyecto final de síntesis: Los proyectos finales de síntesis pueden ser similares a los proyectos y exposiciones que muchos docentes asignan como tareas finales para completar una unidad curricular. Su rasgo distintivo en el marco conceptual de la enseñanza para la comprensión, es que demuestran con claridad el dominio que tienen los estudiantes de las metas de comprensión establecidas. Tales desempeños necesariamente invitan a los alumnos a trabajar de manera más independiente de como lo hicieron en sus desempeños preliminares y a sintetizar las comprensiones que han desarrollado a lo largo de una unidad curricular o de una serie de unidades.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA CONTINUA

La evaluación continua está totalmente ligada a las metas de comprensión y sus criterios deben ser relevantes, explícitos y públicos, con el fin de garantizar en los estudiantes un mayor grado de responsabilidad con su propia formación. Es clave que los alumnos y el docente compartan la responsabilidad de analizar cómo es el avance de los estudiantes hacia las metas de comprensión, de forma similar a como lo hacen los músicos y deportistas en su entrenamiento, logrando que aprendan no solo como han cumplido un desempeño sino también como pueden mejorarlo.

En la valoración continua es necesario tener en cuenta la valoración entre pares académicos, debido a que los estudiantes desarrollan la comprensión del sentido de los criterios de evaluación al evaluar el trabajo de sus compañeros.

4. PROPUESTA DIDÁCTICA

4.1. PRUEBA DIAGNÓSTICA

Con el fin de identificar los conocimientos previos de los estudiantes acerca del razonamiento proporcional, se diseñó un taller de 15 preguntas orientadas a la aplicación de los conceptos de razón y proporción, el cual se aplicó al comienzo del cuarto periodo académico de 2014, a 37 estudiantes del grado 701 de la Institución Educativa Departamental San Miguel.

Para el diseño de la prueba se tomó en cuenta los conocimientos que deberían tener los estudiantes según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, para el ciclo Cuarto-Quinto, debido a que el razonamiento proporcional se desarrolla a lo largo de todos los ciclos de formación.

- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.
- Modelo situaciones de dependencia mediante la proporcionalidad directa e inversa.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
- Identifico y justifico relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
- Interpreto las fracciones en diferentes contextos: Situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.

La prueba se encuentra en el **Anexo 1.**

4.1.1. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Pregunta 1

1. Realiza los puntos **a** y **b** de acuerdo con la siguiente información:

La tabla muestra la relación existente entre el número de cuadernos y su costo en pesos, en una papelería del barrio. Se han borrado algunos valores.

Nº DE CUADERNOS	**PRECIO**
2	$ 6.000
3	$ 9.000
4	
	$ 24.000
6	
7	
15	

a. Ayuda al dueño de la papelería a completarla, teniendo en cuenta que todos los cuadernos tienen el mismo precio.

b. ¿Cómo lograste completar la tabla?

Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, 33 lograron completar los valores de manera correcta, es decir un 89% de los alumnos. Los 4 restantes tuvieron sus mayores dificultades en el precio de 6, 7, 15 cuadernos y en establecer que $24.000 equivale al precio de 8 cuadernos. No obstante en el momento de argumentar 2 de ellos lograron definir el precio de un solo cuaderno, pero llenaron la tabla de $3.000 en $3.000 sin darse cuenta la cantidad de cuadernos que les pedían.

La gran mayoría de los estudiantes argumenta que lograron llenar la tabla averiguando cuánto cuesta un cuaderno y multiplicando el valor por la cantidad de cuadernos. Algunos después de hallar cuánto cuesta un cuaderno sumaron de $3.000 en $3.000, hasta llenar la tabla. Dos de los estudiantes mencionan explícitamente que los precios guardan la misma proporción.

No se detectan mayores inconvenientes estableciendo la proporcionalidad que guardan la cantidad de cuadernos con su respectivo precio, teniendo en cuenta que dichos valores son esencialmente enteros positivos.

Pregunta 2

2. Realiza los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información:

La siguiente tabla relaciona la cantidad de personas que pintan una casa y el tiempo que emplean en hacer el trabajo. Se considera que todos los pintores tienen el mismo ritmo de trabajo.

Nº DE PINTORES	TIEMPO (DÍAS)
10	
8	
6	
4	
2	24

a. Completa la tabla.

b. ¿Qué relación encontraste entre el número de pintores y los días que emplean en hacer el trabajo?

Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, ninguno logró llenar la tabla correctamente. El 72,9% de los estudiantes, es decir 27 de ellos, llenaron la tabla dividiendo entre dos la cantidad de días, es decir 2 pintores 24 días, 4 pintores 12 días, 6 pintores 6 días, 8 pintores 3 días y 10 pintores 1 día y medio. El 10,8%, Cuatro estudiantes, lograron establecer solo la cantidad de días que gastarían cuatro pintores. El 16,2% restantes, 6 estudiantes, completaron la tabla de tal forma que entre más pintores, el tiempo es mayor, argumentando que si dos pintores gastan 24 días, entonces 1 gastará 12 días.

El 83,7% de los estudiantes reconocen que entre más pintores el tiempo que gastarán en hacer el trabajo será menor, es decir, establecen la correlación inversa entre las magnitudes involucradas, no obstante no logran analizar los datos con detenimiento, pues establecen solamente que si 2 trabajadores gasta 24 días entonces 4 gastarán la mitad. De ese punto en adelante siempre hallan la mitad sin relacionar si la cantidad de pintores realmente siempre varía de mitad en mitad.

Cabe destacar que se anexó una cantidad de 10 pintores, para observar si los estudiantes lograban identificar que los días empleados en este caso no se podían expresar mediante un número entero, de lo cual se pudo observar que el 72,9% de ellos estableció que para los 10 pintores se requerían 1,5 días, lo cual es erróneo, pero muestra que si identifican que algunas magnitudes puede ser medidas con un conjunto numérico diferente a los enteros.

Pregunta 3

3. Responde los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información

Doña Julia quiere festejarle el cumpleaños a su hija Valeria y para ello invitó a sus amigos del colegio a una fiesta. Desea hacer una torta que alcance para las 75 personas invitadas, guiándose de un recetario el cual explica cómo realizar una torta para 25 personas.

Torta:

Para: 25 personas
Tiempo de preparación: 2 horas

Ingredientes:

$2\frac{1}{2}$ Kilos de harina.

5 Cucharaditas de polvo Royal.

20 Huevos.

2 De kilos de mantequilla.

3 Tazas de leche.

500 gramos de azúcar

a. Ayuda a doña Julia a establecer la cantidad de ingredientes que necesita para hacer una torta a 75 personas.

Harina ________________

Polvo royal ________________

Huevos ________________

Mantequilla ________________

Leche ________________

Azúcar ________________

b. ¿Cómo lograste establecer la cantidad de los ingredientes?

Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, el 18.9%, 7 estudiantes, lograron completar correctamente la cantidad de ingredientes que necesitaba la receta. El 78,3%, 29 estudiantes, lograron establecer la cantidad de todos los ingredientes excepto la harina. De estos estudiantes la mayor dificultad fue operar con el número mixto, pues al triplicar la cantidad de harina, solo triplicaron la parte entera. Curiosamente un estudiante argumenta que se debe multiplicar por 3 cada alimento, pero solo logra una respuesta correcta en la cantidad de harina y de azúcar.

El 100% de los estudiantes argumenta que para hallar la cantidad de ingredientes se debe multiplicar por 3 cada uno de ellos.

Lo anterior muestra que los estudiantes logran establecer la proporción indicada en la situación problema, pero que la dificultad más grande es el manejo adecuado de las operaciones con números racionales expresados como fracción mixta.

Pregunta 4

4. <u>Realiza los puntos a, b y c de acuerdo con la siguiente información:</u>

La densidad de una población es la cantidad de personas que habita en 1 km2 de superficie. A continuación se muestran algunos departamentos, su superficie en km2 y cantidad de habitantes correspondiente.

Antioquia	Boyacá
	
Superficie: 63.612 km^2	Superficie: 23.189 km^2
Nº de habitantes: 1'342.347	Nº de habitantes: 1'183.409
Guajira	**Cundinamarca**
	
Superficie: 20.848 km^2	Superficie: 24.210 km^2
Nº de habitantes: 387.773	Nº de habitantes: 1'658.698

a. Halla la densidad de la población de cada uno de los departamentos.
b. ¿cuál departamento tiene mayor densidad de población?
c. ¿Qué implica que una ciudad tenga mayor densidad de población?

Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, el 35,1%, 13 estudiantes, lograron determinar de manera correcta la densidad de la población en cada uno de los departamentos solicitados. El 13,5%, 5 estudiantes, determinaron la densidad de manera correcta de 1 y 2 departamentos, pero por algún motivo no continuaron contestando el punto. El 13,5 % razonaron de manera correcta para determinar la densidad de la población, pero su procedimiento a la hora de dividir no fue correcto y por lo tanto no lograron llegar a la respuesta. El 37,8% restante, 14 estudiantes, no logró comprender la pregunta, de los cuales 3 de ellos la dejaron en blanco.

El 40,5%, 15 estudiantes, lograron determinar que Cundinamarca es el departamento con mayor densidad de población.

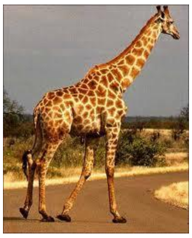
Solamente el 10,8%, 4 estudiantes, argumentaron de manera correcta la implicación que tiene que una ciudad tenga mayor densidad de población, diciendo que hay mayor cantidad de gente por cada kilómetro cuadrado y posiblemente una sobrepoblación.

Se observa que en un contexto diferente se empiezan a tener dificultades para lograr establecer la proporción indicada en la situación problema. También se puede concluir que si se trabaja con magnitudes expresadas mediante números muy grandes, se empiezan a tener problemas de operatividad que impiden la culminación correcta del problema planteado.

Pregunta 5

5. Realiza los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información:

La escala de un plano, mapa o dibujo es la razón entre la longitud medida en dicho plano y la longitud correspondiente en la realidad. Por ejemplo, la foto de la jirafa está en una escala de 1 a 150. Esto significa que por cada centímetro medido en la foto, el tamaño de la jirafa es 150 veces mayor.



a. Usando una regla mide la altura de la jirafa que aparece en la foto.

b. ¿Cuál es la altura real de la jirafa en centímetros?

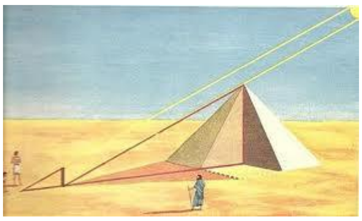
Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, el 48,6%, 18 estudiantes, lograron determinar de manera correcta la altura en centímetros de la jirafa. El 51,35%, 19 estudiantes, no lograron determinar la estatura realizando un mal procedimiento, la mayoría multiplicando 150 x 150. De estos estudiantes 5 dejaron en blanco la pregunta, es decir el 13.5%.

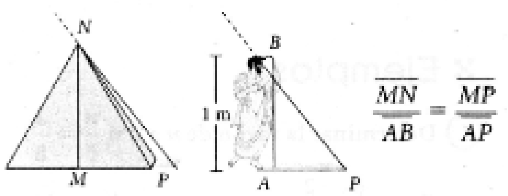
Lo anterior parece indicar que los estudiantes están más relacionados con el razonamiento proporcional a la hora de completar tablas, pero que se presentan dificultades en otros contextos como por ejemplo en este caso el de escalas.

Pregunta 6

6. <u>Realiza el punto a de acuerdo con la siguiente información:</u>

Tales de Mileto utilizó un método interesante para medir la altura de la pirámide de Keops, aplicando las proporciones.





a. Calcula la altura de la pirámide de Keops, teniendo en cuenta que Tales utilizó un bastón de 1 m de largo que proyectó una sombra de 3 m, cuando la pirámide proyectó una sombra de 138 m.

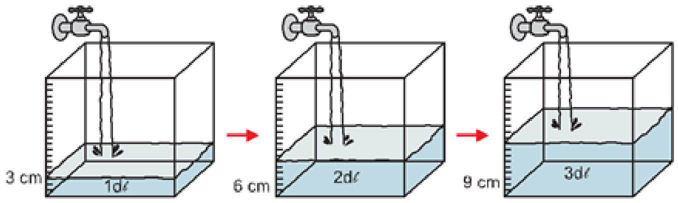
Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, el 29,7%, 11 estudiantes, lograron determinar la altura de la pirámide de manera correcta dividiendo 138 entre 3. Algunos de ellos realizaron un gráfico con las medidas del problema. El 40,5%, 15 estudiantes, dejaron en blanco la pregunta. El 29,7% de los estudiantes realizaron un procedimiento incorrecto, la mayoría multiplicó 138 x 3 y otros sumaron los valores 138 y 3.

Se logra observar que existen grandes dificultades en las nociones de semejanza y sobretodo de un pensamiento geométrico y métrico, por lo cual se hace necesario tener en cuenta estos aspectos en la propuesta didáctica que se desea diseñar.

Pregunta 7

7. Realiza los puntos a, b y c de acuerdo con la siguiente información:

María observó cómo se llenaba de agua un recipiente y decidió tomar los datos en una tabla.

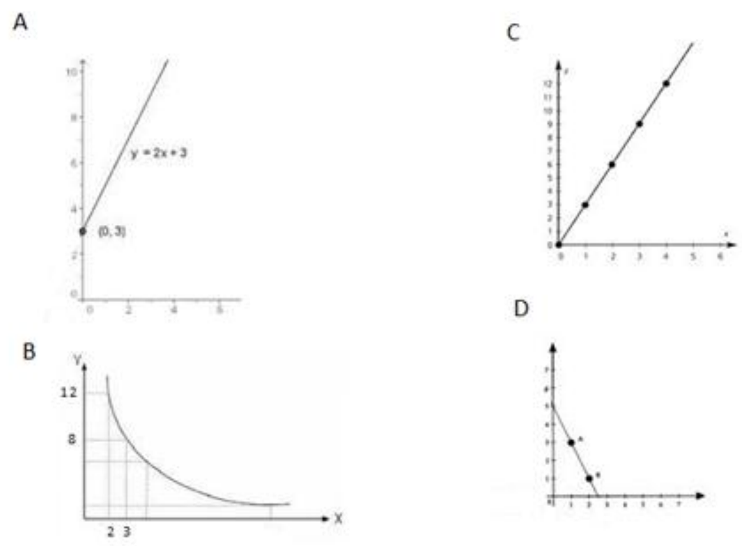


Cantidad de agua *(dl)*	1	2	3	4	5
Profundidad del agua *(cm)*			9		

a. Ayuda a María a completar la tabla

b. ¿Existe alguna relación entre la cantidad de agua y la profundidad? Explica tu respuesta.

c. Si María hiciera una gráfica que muestre el comportamiento de la profundidad del agua con respecto a la cantidad ¿cuál sería la más indicada?



Análisis: De los 37 estudiantes que realizaron la prueba, el 89,1%, 33 estudiantes, lograron completar de manera adecuada la tabla. De los 4 estudiantes restantes, 1 completo correctamente los valores de las dos primeras casillas y dejo en blanco las demás. Los otros 3 estudiantes restantes no contestaron el punto.

En el literal b, el 48,6%, 18 estudiantes, establece que la relación que existe es que entre mayor cantidad de agua mayor será la profundidad. El 18.9%, 7 estudiantes, argumentan que la relación es que la cantidad de agua es múltiplo de 3 con la profundidad del agua. El 5,4%, 2 estudiantes, argumentan que entre mayor cantidad de agua habrá menos profundidad. El 5,4% argumenta que no existe ninguna relación entre la cantidad de agua y la profundidad. Finalmente el 21,6%, 8 estudiantes no contestaron este literal.

En el literal c, el 67,5% contestaron correctamente señalando el gráfico c. El 24,3%, 9 estudiantes, contestaron que el gráfico correcto es el b. El 8,1%, 3 estudiantes, no contestaron la pregunta.

Lo anterior muestra que los estudiantes tienen un mayor acercamiento con el análisis de tablas de valores, como se había observado en la pregunta 1, no obstante falta un mayor trabajo en la representación gráfica de dichas relaciones.

4.2. ENCUESTA A DOCENTES

Teniendo en cuenta que la propuesta didáctica tiene como objetivo principal abordar el razonamiento proporcional de manera trasversal con otras áreas del conocimiento, se diseñó una encuesta con el fin de conocer las opiniones de los docentes de la Institución Educativa Departamental San Miguel, acerca de la enseñanza, sus conocimientos sobre proporcionalidad y las aplicaciones en sus respectivas áreas. Véase **ANEXO 2.**

La encuesta fue aplicada a 7 docentes, de los cuales 3 son del área de ciencias naturales biología, física y química, 2 del área de ciencias sociales, 1 de artística y uno del área de matemáticas. El sondeo consta de 5 preguntas con opciones de respuesta SI o NO y con un espacio para su justificación. A continuación se explicará la intencionalidad de cada una de las preguntas.

¿Considera importante que se le dé un enfoque transversal a la enseñanza de las matemáticas, teniendo en cuenta otras áreas del conocimiento? SI___ NO___ ¿Por qué?

La intención de esta pregunta es sustentar y justificar la importancia de diseñar unidades didácticas con enfoques transversales, para lograr aprendizajes significativos en los estudiantes.

¿Ha tenido dificultades en la enseñanza de su área, debido a preconceptos que deberían tener los estudiantes en el área de matemáticas? SI___ NO___ De ser así ¿Cómo trata de superar esas dificultades?

Esta pregunta tiene como fin evidenciar lo estipulado en el planteamiento del problema, en donde se argumenta la falta de transversalidad, entre las áreas que componen el currículo.

¿Estaría dispuesto a colaborar en la implementación de una propuesta didáctica, que tenga un enfoque transversal con el área en cual se desempeña como docente? SI___ NO___ ¿Por qué?

Esta pregunta busca conocer el nivel de apoyo que se tendrá en el diseño y futura implementación de la propuesta didáctica, por parte de los docentes de otras áreas, pues son ellos parte fundamental en el desarrollo de ésta.

¿Ha escuchado el término proporcionalidad? SI___ NO___ De ser así ¿Qué significado tiene para usted?

Esta pregunta tiene como objetivo indagar sobre los conocimientos que tienen los docentes de otras áreas sobre el concepto de proporcionalidad, debido a que éste es esencial para el desarrollo de la propuesta.

¿La proporcionalidad tiene aplicaciones directas en el área en la cual usted se desempeña? SI___ NO___ No conozco____ De tener aplicaciones, por favor descríbalas en el siguiente espacio.

Esta pregunta solo es contestada por los docentes que respondieron de forma afirmativa en la pregunta anterior y tiene como fin indagar sobre las diferentes aplicaciones de la proporcionalidad en otras áreas del conocimiento y así tenerlas en cuenta en el diseño de la propuesta didáctica.

4.2.1. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Pregunta 1

El 100% de los encuestados considera importante que se le dé un enfoque trasversal a la enseñanza de las matemáticas teniendo en cuenta otras áreas del conocimiento. Entre los argumentos se encuentra:

- Porque la integración de diferentes áreas permite afianzar los conocimientos y hacer procesos de enseñanza-aprendizaje significativos.
- Permite contextualizar el conocimiento teórico.
- Porque es más significativo el trabajo de las matemáticas teniendo en cuenta aspectos de la vida diaria.
- Porque en todas las áreas del saber se utilizan las matemáticas para argumentar experimentos científicos y sociales ya que nos permite medir y comparar.
- Porque permite avanzar más y no repetir temáticas.

Pregunta 2

El 85, 7%, 6 docentes, han tenido dificultades en la enseñanza de su área, debido a preconceptos que deberían tener los estudiantes en el área de matemáticas. El único docente que respondió no haber tenido dificultades fue el de artística.

La manara como los docentes tratan de superar estas dificultades son:

- Utilizando el tiempo de la clase para explicar el tema necesario.
- Generando retroalimentación de las temáticas necesarias.
- Abordando las falencias desde su raíz conceptual, teniendo en cuenta su práctica real y contexto.
- Identificando los elementos significativos que constituyen el problema, para dar una solución con criterio y de forma efectiva.

Pregunta 3

El 100% de los docentes estarían dispuestos a colaborar en la implementación de una propuesta didáctica que tenga un enfoque transversal con el área en que se desempeñan. Entre las razones más destacadas están:

- Porque al relacionar conocimientos se aplicaría el saber-hacer del estudiante.
- Porque permite una mayor integración del currículo.
- Porque enriquece los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Pregunta 4

El 85, 7%, 6 docentes, han escuchado el término de proporcionalidad. El único docente que respondió de forma negativa es del área de ciencias sociales. Entre los significados que tiene el concepto de proporcionalidad para ellos, se encuentra:

- La relación que se establece entre medidas o cantidades.
- Comparación entre diferentes objetos.
- Cuando las cosas crecen o decrecen en la misma proporción.
- Relación entre magnitudes.
- La cantidad que se obtiene de un fenómeno, evento o acción, frente al total del fenómeno, evento o acción programado y que representa el 100%.
- Valores o variables que pueden ser directas o inversas.

Pregunta 5

De los 6 docentes que respondieron afirmativamente la pregunta anterior, el 100% argumenta que la proporcionalidad tiene aplicaciones directas en el área en la cual se desempeñan. Las aplicaciones mencionadas son:

- En temperatura, soluciones, gases y estequiometria.
- Experimentación de eventos y probabilidad.
- Magnitudes físicas, leyes del movimiento, velocidad, etc.
- Escalas.
- Escalas y mapas.
- Regla de tres, semejanza y función lineal.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Se observa que los docentes de la Institución Educativa Departamental San Miguel están de acuerdo con el diseño de una propuesta didáctica que priorice en la transversalidad de la enseñanza de las matemáticas con otras áreas del conocimiento y además que están dispuestos a colaborar tanto en el diseño como en la implementación de la misma, pues reconocen la importancia de dicha transversalidad en los proceso de enseñanza-aprendizaje.

4.3. SECUENCIA DIDÁCTICA

TÓPICO GENERATIVO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: Las razones y proporciones en contexto.

1. ACTIVIDAD: COCINANDO PROPORCIONALMENTE

META DE COMPRENSIÓN: Aplicar el razonamiento proporcional en situaciones cotidianas.

MATERIALES:

- Una manzana.
- Una pera.
- Un Banano.
- ¼ de kilo de fresa.
- ¼ de litro de yogurt.
- ½ racimo de uvas.

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

EXPLORACIÓN:

Se iniciará la clase mostrando la receta de una ensalada de frutas para 5 personas con sus respectivos ingredientes. En grupos de 4 personas los estudiantes deberán desarrollar la Guía 1 (Véase **Anexo 3**), primero de manera individual y después de manera grupal.

Cada grupo escogerá un representante y luego se les pedirá, que manteniendo la receta original, organicen un compartir donde la ensalada de frutas alcance para las 40 personas del salón (incluyendo los 37 estudiantes, los dos directores grupo y el docente que realiza la actividad). Los estudiantes deberán establecer la cantidad de ingredientes necesarios para lograr el objetivo y distribuírselos entre todos, para traerlos en la siguiente clase.

Finalmente los representantes repartirán las funciones de tal manera que todos colaboren en la realización de la ensalada de frutas, para las 40 personas del salón.

EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes, mediante el razonamiento proporcional, logren establecer la cantidad de ingredientes que se necesitan para realizar la ensalada de frutas, si el número de personas varía de 5 a 40. De esta manera prepararlos para contextos reales en lo que necesitarán establecer proporciones.

Se tendrá en cuenta en la valoración, la elaboración de las guías de manera individual y grupal, la participación en sus respectivos grupos, los aportes de los representantes de cada grupo y el desarrollo final del compartir donde se verificará el cumplimiento del objetivo.

2. ACTIVIDAD: DIBUJO A ESCALA

META DE COMPRENSIÓN: Que el estudiante logre realizar dibujos a escala usando la proporcionalidad como eje central.

MATERIALES:

- Lápiz, borrador y regla.
- Lamina, o dibujo que se desea hacer a escala.
- Un pliego de cartulina.
- Acetato.
- Marcador.

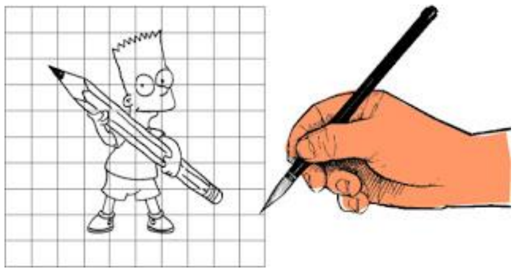
DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

Con anticipación se le pedirá a los estudiantes que traigan un dibujo que deseen ampliar, ya sea una lámina de álbum, revista periódico etc. De acuerdo al tamaño del dibujo se le asignará a cada uno la escala a la cual deberán ampliar la figura. Cada estudiante deberá desarrollar la Guía 2 (Ver **Anexo 4**) de manera individual.

Para lograrlo, los estudiantes deberán hacerle una cuadricula al dibujo, de 1 cm cada cuadro, como muestra la figura 4-1[25]. Si no desean rayarlo podrán realizar la cuadrícula en un acetato y luego ponerlo encima del dibujo.

[25] Las figuras 4-1 y 4-2 son tomadas de http://miguelangelmont.blogspot.com/2012/12/como-hacer-un-dibujo-gran-escala.html

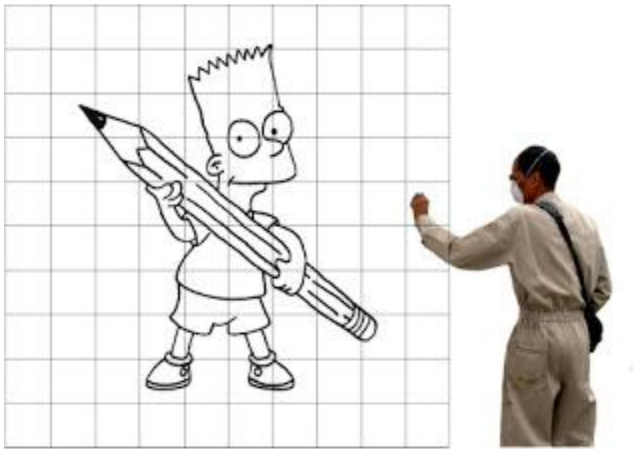
Figura 4-1: Ejemplificación de cuadrícula para dibujo a escala.



Luego deberán hacer la cuadrícula en el pliego de cartulina según la escala asignada, con lápiz y un trazo suave que permita borrar. Por ejemplo si la escala es de 1 a 10, cada cuadro deberá hacerse de 10 cm de ancho.

Finalmente los estudiantes dibujaran cuadro por cuadro, obteniendo un dibujo a escala mayor como se muestra en la figura 4-2.

Figura 4-2: Ejemplificación de dibujo a escala.



EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes logren realizar dibujos a escalas establecidas y puedan utilizar estos conceptos en áreas como dibujo técnico, artes y sociales.

Se valorará el desarrollo del taller de manera individual y la realización de la cuadrícula con la escala determinada. También se valorará el dibujo final.

3. ACTIVIDAD: MAQUETA SISTEMA SOLAR[26]

META DE COMPRENSIÓN: Aplicar el concepto de proporcionalidad al construir un modelo del sistema solar, que conserve las escalas de los diámetros y distancias entre los planetas.

MATERIALES:

- Un Balón de baloncesto de aproximadamente 25 cm de diámetro.
- Dos bolas de ping-pong o de icopor de aproximadamente 2cm y 2,5 cm respectivamente.
- Cinco bolitas plásticas para manillas de aproximadamente 1 mm.
- Dos bolitas plásticas de aproximadamente 2 mm.
- Un metro

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

EXPLORACIÓN:

Se iniciará la clase con un video alusivo al sistema solar, donde se muestra la distancia entre los planetas https://www.youtube.com/watch?v=a1djRNR1g58. Después de observar el video se les propondrá a los estudiantes construir una maqueta del sistema solar que conserve y mantenga la escala en los diámetros de los planetas y en la distancia de estos al sol.

INVESTIGACIÓN GUIADA:

Para lograrlo se le solicitará con anticipación al docente de sociales que investigue con los estudiantes las distancias de los diferentes planetas al sol, así como el diámetro de cada uno de ellos. Los estudiantes desarrollarán la Guía 3 (ver **Anexo** 5). A continuación se socializarán los resultados y se propondrá la construcción de una tabla que represente dichos valores como se muestra en la tabla 4-1.

[26] La actividad está basada en el artículo Matemática aplicada y relaciones de proporcionalidad de la Dra. Rosa M. Ros. (1996). Revista EMA Vol1, Nº2, págs. 125 a 139.

Tabla 4-1: Diámetros y distancia al sol de los diferentes planetas del sistema solar.

TABLA 1	Diámetros (km)	Distancia al sol (km)
Sol	1’392.000	
Mercurio	4.878	57’900.000
Venus	12.180	108’300.000
Tierra	12.756	149’700.000
Marte	6.760	228’100.000
Júpiter	124.800	778’700.000
Saturno	120.000	1.430’100.000
Urano	50.000	2.876’500.000
Neptuno	45.000	4.506’600.000
Plutón	3.300	5.914’800.000

Los estudiantes ayudarán a construir con ayuda del docente una tabla que tenga una relación aproximada de 55.000 km a 1 cm como lo muestra la tabla 4-2.

Tabla 4-2: Escala de 55.000 km a 1 cm de los valores de la tabla 4-1.

TABLA 2	Diámetros (cm)	Distancia al sol (m)
Sol	25,0	
Mercurio	0,1	10
Venus	0,2	19
Tierra	0,2	26
Marte	0,1	41
Júpiter	2,5	140
Saturno	2,0	250
Urano	1,0	500
Neptuno	1,0	800
Plutón	0,1	1.000

Con todos los datos listos se realizará una lluvia de ideas para escoger, de los materiales traídos, los que mejor representen a cada uno de los planetas del sistema solar, teniendo en cuenta la medida a escala.

En el patio del colegio y con ayuda del metro los estudiantes tendrán que colocar los planetas según los datos obtenidos. Poco a poco se darán cuenta que el patio no alcanza para representar todos los planetas y finalmente se realizará una socialización sobre la actividad realizada, resaltando puntos como la comparación de tamaños entre el sol y los distintos planetas, así como la enorme distancia que existe entre ellos.

EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes logren realizar la maqueta del sistema solar, que guarde la proporción entre los diámetros de los planetas y sus respectivas distancias al sol.

Se valorará la participación de los estudiantes en la etapa de exploración con el video sugerido, teniendo en cuenta sus preguntas y aportes. Se tendrá en cuenta la consulta realizada con ayuda del docente de sociales, la cual tendrán que entregarla de manera escrita. Se valorará el desarrollo de la Guía 3 (ver **Anexo 5**). Se evaluará la participación de los estudiantes en la construcción de la tabla con una escala aproximada de 55.000 a 1. Finalmente se valorará la participación de los estudiantes en la construcción de la maqueta del sistema solar y su respectiva socialización.

4. ACTIVIDAD: MAPAS Y ESCALAS[27]

META DE COMPRENSIÓN: Comprender las escalas utilizadas en los mapas geográficos, al trabajar de manera interdisciplinar con el concepto de proporción.

MATERIALES:

- Mapa de Colombia que represente la situación geográfica de algunas de las ciudades más importantes del país.

[27] Actividad basada en MARAÑON, M. (2012).

- Regla.

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

EXPLORACIÓN:

Los estudiantes realizarán la Guía 4 (ver **Anexo 6**), en donde se trabajarán escalas asociadas a mapas geográficos.

Después de observar los ejemplos propuestos en la Guía y de contestar las preguntas necesarias, los estudiantes utilizando una regla, medirán las partes señaladas en el mapa de Colombia[28], el cual tendrá la escala correspondiente, para ir contestando una serie de preguntas acerca de las distancias entre diferentes ciudades.

Figura 4-3: Mapa de Colombia para trabajar escalas.

Preguntas:

a) ¿A cuántos kilómetros equivale 1 centímetro en el mapa?
b) ¿A qué escala está dibujado el mapa?
c) ¿A qué distancia se encuentra Bogotá de Cartagena, Leticia de Puerto Bolívar y Medellín de Cali?
d) Se sabe que la distancia real entre Bogotá y Manizales es de 300 km. ¿Por cuántos centímetros estarían distanciadas estas dos ciudades en el mapa?

[28] El mapa utilizado en la actividad es tomado de http://www.mapadecolombia.com.co/1907_mapa-politico-pequena-escala-de-colombia.html

EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes logren comprender las escalas realizadas en el diseño de mapas y puedan utilizar estos conceptos en áreas como Ciencias Sociales.

Se valorará el desarrollo del taller y la participación en las socializaciones. También que se logré utilizar de manera adecuada el concepto de proporción en las escalas requeridas.

5. ACTIVIDAD: MEDICIÓN DE EDIFICIOS[29]

META DE COMPRENSIÓN: Medir la altura del edificio del colegio, utilizando los conceptos de proporción y semejanza.

MATERIALES:

- Metro.
- Espejo.

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

EXPLORACIÓN:

Los estudiantes desarrollarán la Guía 5 (véase **Anexo 7**) y socializarán los resultados obtenidos.

INVESTIGACIÓN GUIADA:

La actividad estará dividida en tres partes o métodos diferentes para poder medir el edificio del colegio[30] utilizando los conceptos de proporción y semejanza de triángulos. Se realizará por grupos de cuatro personas los cuales realizarán las mediciones, toma de datos y los cálculos necesarios para realizar la actividad.

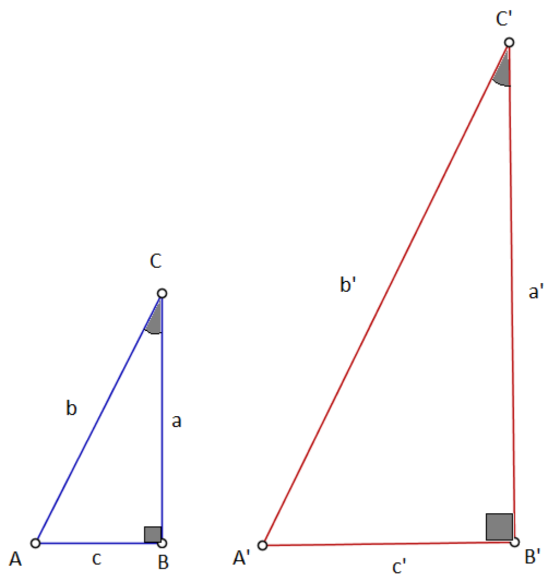
[29] Actividad basada en MARAÑON, M. (2012).
[30] El edificio es el que aparece en la fotografía y pertenece a la Institución Educativa Departamental San Miguel del municipio de Sibaté Cundinamarca.

Figura 4-4: Fotografía del edificio de la Institución Educativa Departamental San Miguel. Sibaté, Cundinamarca.

PRIMER MÉTODO

Para determinar la altura del edificio se medirá la longitud de la sombra proyectada sobre el suelo y la sombra que proyecte uno de los compañeros de la clase. Con base en las actividades realizadas en la Guía 5, se harán los cálculos para determinar la longitud de la sombra del edificio.

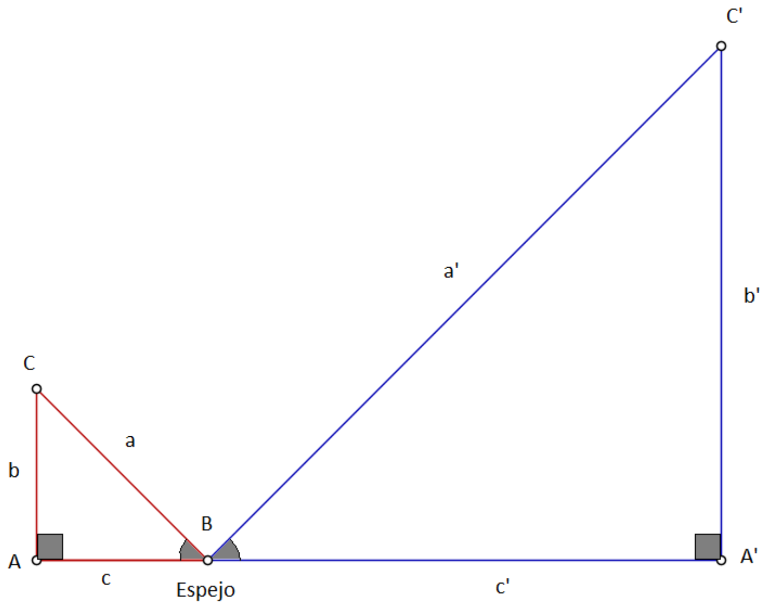
Figura 4-5: Modelación geométrica para estimar la altura del edificio. Método 1.



SEGUNDO MÉTODO

Utilizando un espejo plano y aprovechando que el ángulo de reflexión de los rayos que se reflejan en él, coinciden con el de incidencia, se determinará por semejanza de triángulos la altura del edificio. Los estudiantes colocarán el espejo en el suelo de tal manera que se pueda observar a través de él el punto más alto del edificio. De esta manera, conociendo a qué altura se encuentra del suelo los ojos del observador y las distancias del edificio y el observador al espejo, podemos determinar la altura.

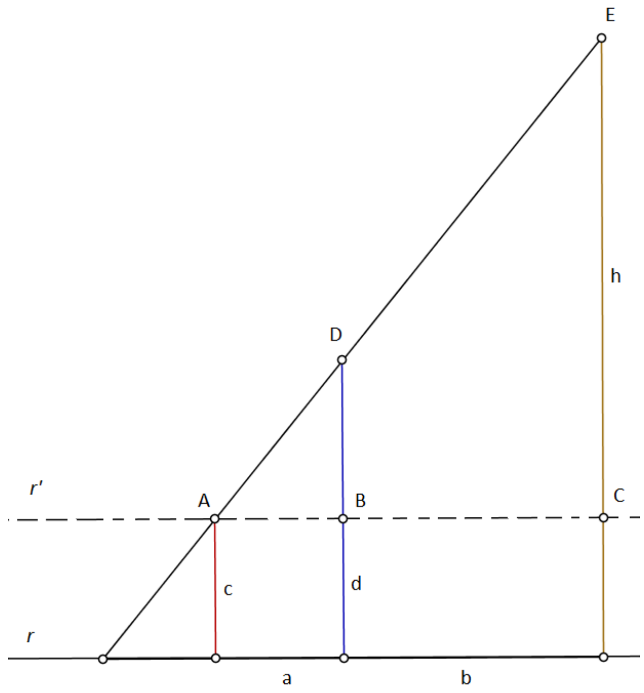
Figura 4-6: Modelación geométrica para estimar la altura del edificio. Método 2.



TERCER MÉTODO

El tercer método será por observación directa y consiste en hacer coincidir, desde nuestro punto de visión, el punto más alto de un objeto cuya altura conocemos, con el punto más elevado del edificio.

Figura 4-7: Modelación geométrica para estimar la altura del edificio. Método 3.



EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes logren estimar la medida del edificio del colegio usando el concepto de semejanza de triángulos, con alguno de los métodos propuestos.

Se valorará el desarrollo del taller y la participación en las socializaciones. También que se logré utilizar de manera adecuada el concepto de semejanza de triángulos en la situación problema planteada.

6. ACTIVIDAD: TRAZOS ESTELARES

META DE COMPRENSIÓN: Utilizar de manera interdisciplinar el concepto de proporción con base en los trazos estelares.

MATERIALES:

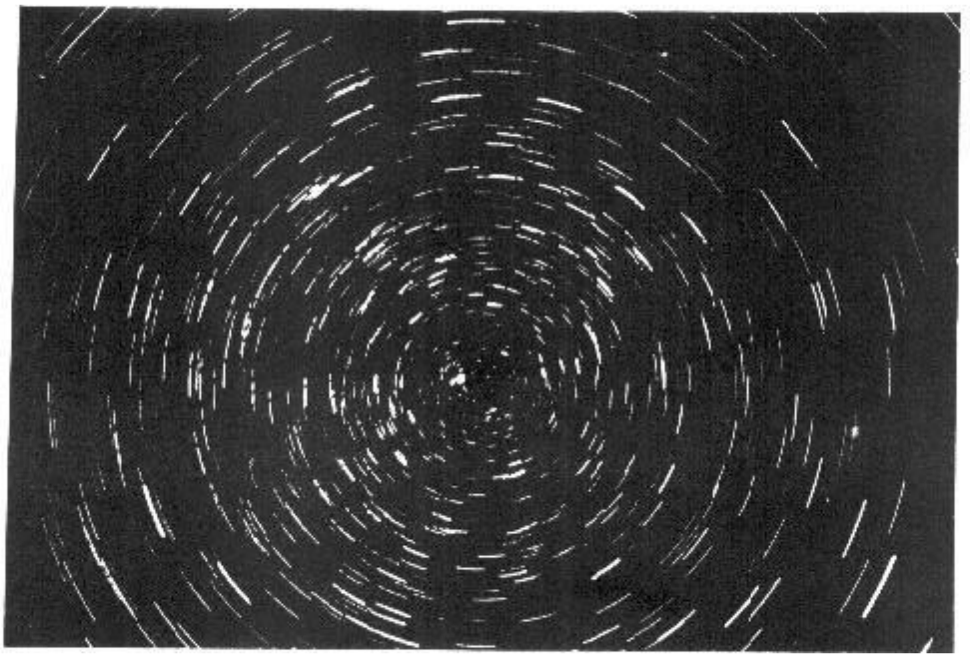
- Transportador.
- Fotografía de trazos estelares para un observador norte.

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

EXPLORACIÓN:

Se realizará un video para introducir el tema del movimiento diurno aparente de los astros y la forma como se puede observar el trazo estelar, con una duración de 30 segundos http://www.youtube.com/watch?v=hTstkBiGYLE. Después se les entregará la Guía 6 (véase **Anexo 8**) en donde se encuentra una fotografía (véase figura 4-8)[31] donde se aprecie el movimiento de rotación de las estrellas en torno a la estrella polares, ubicada cerca del polo norte celeste y se realizará la explicación de cómo calcular el periodo de rotación celeste, es decir la duración del día, teniendo en cuenta que el ángulo central de un trazo es al tiempo de exposición, como el ángulo de 360º (correspondiente a una vuelta completa), es al periodo de rotación de la Tierra.

Figura 4-8: Fotografía de trazos estelares en torno a la estrella polares.



En grupos de dos personas escogerán uno de los trazos de las estrellas y medirán el ángulo central correspondiente (véase figura 4-9). Realizado esto cada grupo puede calcular la proporción correspondiente.

[31] Las figuras 4-8 y 4-9 son tomadas de Dra. ROSA. M. ROS. (1996). Matemática aplicada y relaciones de proporcionalidad. Revista EMA, Vol. 1 Nº 2, Págs. 125 a 139.

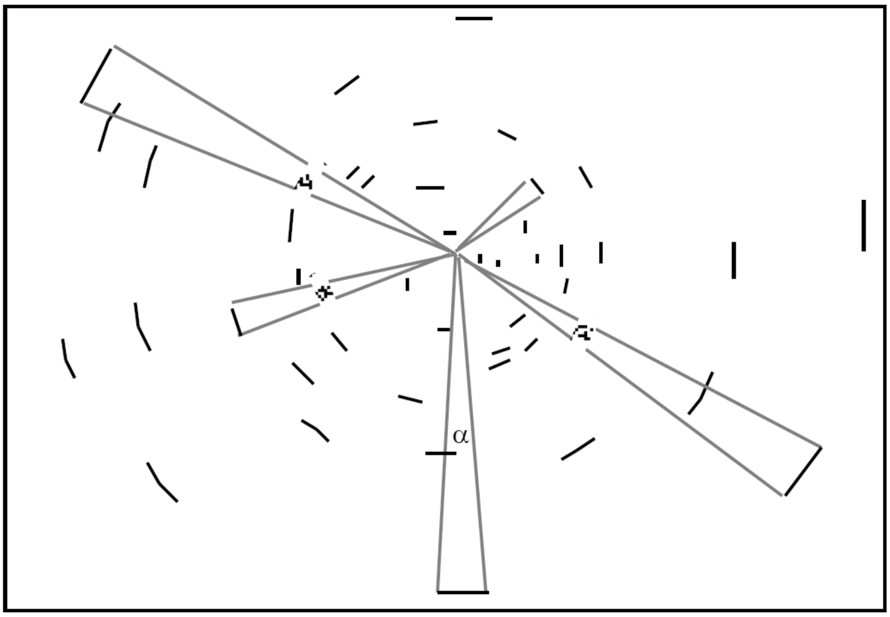
Por ejemplo el ángulo central en la figura es de 9° y el tiempo de exposición fue de 35 minutos, por lo tanto tenemos que.

$$\frac{9°}{35} = \frac{360°}{P}$$

Es decir $P = 1400$ minutos aproximadamente $23,\overline{3}$ horas.

Finalmente se socializarán los resultados con otros grupos y se discutirá el margen de error que existe y su posible causa.

Figura 4-9: Ejemplificación del ángulo central en los trazos estelares.



EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes apliquen el concepto de proporción en diferentes contextos y logren calcular el periodo de rotación celeste, es decir la duración del día, de acuerdo al ángulo central de rotación de las estrellas.

Se tendrá en cuenta en la valoración, la participación de los estudiantes en la exploración y el desarrollo de la guías de manera grupal. También se valorará la aplicación del concepto de proporción en los trazos estelares y su respectiva socialización.

7. ACTIVIDAD: CONTEO CON CAPTURA Y RECAPTURA

META DE COMPRENSIÓN: Utilizar el método de Lincon para estimar la cantidad de objetos de un conjunto que a simple vista no se puede determinar.

MATERIALES POR GRUPO:

- Una libra de fríjoles.
- Una bolsa plástica.
- Un marcador.

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN

EXPLORACIÓN:

Los estudiantes distribuidos en grupos de cuatro personas realizarán la Guía 7 (Véase **Anexo 9**) en la que se explica el método de Lincon utilizado por los biólogos para estimar la cantidad de peces que habitan en un lago, el cual consiste en capturar cierta cantidad de peces y marcarlos, dejándolos nuevamente en el lago. Pasados unos días se captura un número importante de peces y se verifica la cantidad de peces que tienen la marca. Los que poseen la marca son una fracción del total de peces. Es decir $p:P :: t:T$ donde:

p: Número de peces marcados la segunda vez.
P: Total de peces marcados la primera vez.
t: Total de peces capturados.
T: Población total.

INVESTIGACIÓN GUIADA[32]:

Cada grupo de estudiantes deberá traer una libra de fríjoles y depositarlos en una bolsa. Utilizando el método de Lincon los estudiantes estimarán la cantidad de granos de frijol que contiene la bolsa. Para lograrlo cada grupo realizará una señal, con marcador, a 20 granos de frijol y los depositará de nuevo en la bolsa. Después de que todos los fríjoles estén revueltos, sacarán una

[32] La investigación guiada está basada en un módulo de la asignatura Taller Experimental de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, realizado por el docente Carlos Perilla.

manotada y contarán la cantidad de fríjoles marcados y la cantidad de fríjoles sacados. Repetirán el proceso 5 veces y consignarán en la Guía los resultados obtenidos.

Finalmente se realizará una socialización con todos los estudiantes para hacer las respectivas comparaciones.

EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes apliquen el concepto de proporción para estimar la cantidad de objetos de un conjunto.

Se valorará el desarrollo de la Guía y la participación de los estudiantes en la actividad y la socialización de los resultados.

8. ACTIVIDAD: MEDIR EL TIEMPO DE CAÍDA DEL AGUA

META DE COMPRENSIÓN: Acercar a los estudiantes a la modelación matemática a través de experimentos sencillos, que abarquen el concepto de proporcionalidad.

MATERIALES POR GRUPO:

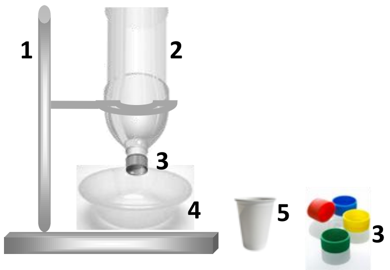
- Una botella plástica de 1,3 litros de capacidad. Se le cortará la parte inferior.
- Cuatro tapas de botellas con orificios de diferente diámetro según el color: Tapa Azul 2,5 mm; tapa roja 3,5 mm; tapa amarilla 4,8 mm; tapa verde 6mm.
- Un cronómetro.
- Un recipiente de menor capacidad que la botella (unos 200 ml) el cual se usará como unidad de medida de volúmenes de agua. (Puede ser un vaso plástico)
- Un recipiente para contener el agua que sale de la botella.
- Computador portátil con Excel (Sala de sistemas de la institución, con computadores para educar)

DESEMPEÑO DE COMPRENSIÓN[33]

INVESTIGACIÓN GUIADA:

Los estudiantes se organizarán en grupos de cuatro personas, a los cuales se les entregará la Guía 8 (Véase **Anexo 10**), la cual deberán desarrollar, y un montaje como el que se muestra en la figura 4-10. Cada grupo deberá seleccionar la tapa del color que le corresponda, azul, roja, amarilla o verde las cuales tienen un orificio de 2,5mm, 3,5mm, 4,8mm o 6mm de diámetro, respectivamente y realizar la medición del tiempo (con cronometro) que tarda la botella en desocuparse, cuando tiene un volumen de agua (un vaso). Después de registrado el tiempo se realizará la medición con dos volúmenes de agua (dos vasos de agua) y así sucesivamente hasta llegar a seis volúmenes (seis vasos de agua).

Figura 4-10: Montaje del experimento llamando Medir el tiempo de caída del agua.



1. Soporte universal.

2. Botella con el fondo cortado.

3. Tapas con orificios.

4. Recipiente para recoger el agua.

5. Vaso de medición.

Después de registrados los datos, los estudiantes realizarán la tabulación y las gráficas correspondientes en Excel, como se muestra en la figura 6, con ayuda del docente de sistemas de la institución. De manera similar se realizará el registro del tiempo que tarda en caer el agua al dejar fijo el volumen y hacer variar los diámetros de los agujeros de la tapa.

[33] La actividad está basada en un módulo de la asignatura Taller Experimental de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, realizado por el docente Freddy Alberto Monroy Ramírez.

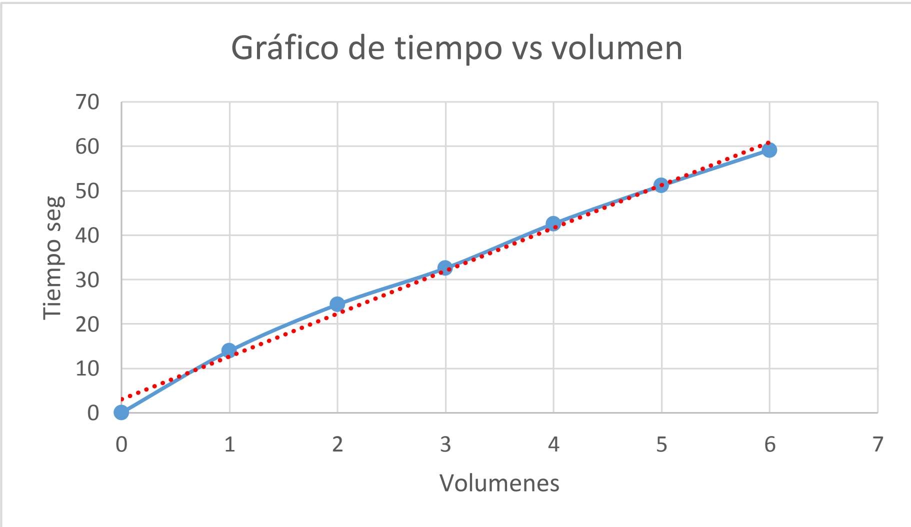
Cada grupo deberá realizar el informe de los resultados para socializarlos con sus compañeros en la siguiente clase. Los resultados esperados se muestran a continuación:

Al hacer variar los volúmenes de agua y dejar fijo el diámetro se obtiene 4 tablas similares a la siguiente.

Tabla 4-3: Tiempo de caída del agua variando el volumen.

Tapa 3,5 mm	
V	**t**
0	0
1	13,92
2	24,37
3	32,55
4	42,57
5	51,17
6	59,2

Figura 4-11: Gráfico de tiempo vs volumen.

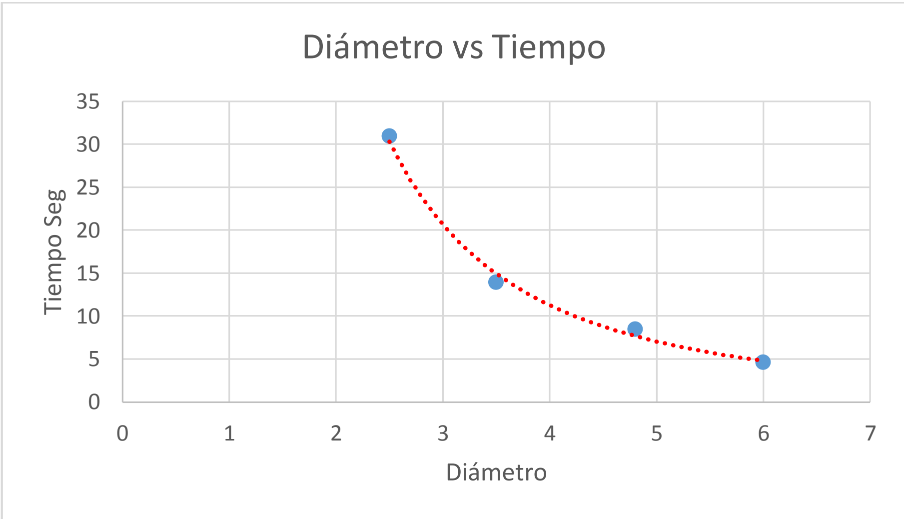


Al hacer variar los diámetros de los agujeros de las tapas y dejar fijo el volumen se obtiene 6 tablas similares a la siguiente.

Tabla 4-4: Tiempo de caída del agua variando el diámetro.

Volumen 1	
Diámetro tapa Azul	Tiempo
2,5	30,92
3,5	13,92
4,8	8,42
6	4,6

Figura 4-12: Gráfico de diámetro vs tiempo.



EVALUACIÓN CONTINUA

Se pretende que los estudiantes, mediante el razonamiento proporcional, logren establecer comportamientos, graficar tendencias, establecer fórmulas y analizar situaciones problema y de esta manera prepararlos para contextos en diferentes áreas como la física en lo que necesitarán establecer comportamientos proporcionales.

Se tendrá en cuenta en la valoración, la elaboración de las guías de manera grupal, la participación y aportes en sus respectivos grupos y el desarrollo exitoso de la práctica realizada.

5. CONCLUSIONES

El manejo del razonamiento proporcional en los estudiantes de educación básica y media es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento cuantitativo en diferentes líneas de la matemática como la geometría y el álgebra e incluso en etapas superiores en las que se necesitan de procesos formales como el concepto de función. Un adecuado manejo del razonamiento proporcional favorece el desempeño de los estudiantes en diferentes áreas del conocimiento como la biología, física, química e incluso otorga una mejor comprensión en áreas como las ciencias sociales y el arte. No obstante se debe tener especial cuidado ya que las nociones de razón y proporción expresan la comparación ente magnitudes y no necesariamente el cociente indicado entre números, como lo manejan muchos de los textos escolares y universitarios estudiados en la realización de esta propuesta didáctica. Lo anterior genera diversas dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las proporciones debido a que se suele confundir la noción de razón con la de fracción.

Para el diseño de una secuencia didáctica es necesario establecer los conocimientos previos que tienen los estudiantes, en el caso particular de este estudio se diseñó un prueba diagnóstica que permitió observar las dificultades de los estudiantes en el desarrollo del razonamiento proporcional en diferentes contextos, lo cual fue clave en el diseño de la propuesta didáctica. Así mismo indagar las opiniones de los docentes de la Institución sobre la importancia que tiene para ellos un enfoque transversal en la enseñanza de las matemáticas, fue esencial debido a que este era el objetivo principal de la propuesta y no tendría el mismo impacto sin la colaboración y trabajo en equipo de los docentes de la institución.

Finalmente el privilegiar situaciones en la que los estudiantes apliquen de manera contextualizada el concepto de proporción, ayuda al desarrollo de las competencias establecidas por el Ministerio de Educación Nacional, desde los diferentes pensamientos. De esta manera actividades realizadas como el conteo con captura y recaptura, permite progresar en el pensamiento aleatorio y el cálculo de probabilidades y abrir paso al manejo algebraico por parte de los estudiantes. Igual sucede con actividades como la medir el tiempo de caída del agua, en la cual se trabaja el pensamiento variacional y la actividad de medición de edificios con la cual se desarrolla un pensamiento geométrico y métrico.

Por lo mencionado anteriormente se concluye que la propuesta didáctica cumple con su objetivo principal de darle una transversalidad a la enseñanza de las matemáticas con el concepto de proporción y así mismo ayuda a conectar los diferentes pensamientos establecidos en los Estándares básicos de competencias en matemáticas.

ANEXO 1. PRUEBA DIAGNÓSTICA

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE PROPORCIONALIDAD
MATEMÁTICAS GRADO SÉPTIMO

NOMBRE: ____ **CURSO:** ________________

1. <u>Realiza los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información:</u>

La tabla muestra la relación existente entre el número de cuadernos y su costo en pesos, en una papelería del barrio. Se han borrado algunos valores.

Nº DE CUADERNOS	PRECIO
2	$ 6.000
3	$ 9.000
4	
	$ 24.000
6	
7	
15	

a. Ayuda al dueño de la papelería a completarla, teniendo en cuenta que todos los cuadernos tienen el mismo precio.
b. ¿Cómo lograste completar la tabla?

2. <u>Realiza los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información:</u>

La siguiente tabla relaciona la cantidad de personas que pintan una casa y el tiempo que emplean en hacer el trabajo. Se considera que todos los pintores tienen el mismo ritmo de trabajo.

Nº DE PINTORES	TIEMPO (DÍAS)
10	
8	
6	
4	
2	24

a. Completa la tabla.
b. ¿Qué relación encontraste entre el número de pintores y los días que emplean en hacer el trabajo?

3. Responde los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información

Doña Julia quiere festejarle el cumpleaños a su hija Valeria y para ello invitó a sus amigos del colegio a una fiesta. Desea hacer una torta que alcance para las 75 personas invitadas, guiándose de un recetario el cual explica cómo realizar una torta para 25 personas.

Torta:
Para: 25 personas
Tiempo de preparación: 2 horas

Ingredientes:

$2\frac{1}{2}$ Kilos de harina.

5 Cucharaditas de polvo Royal.

20 Huevos.

$\frac{1}{4}$ De kilo de mantequilla.

3 Tazas de leche.

500 gramos de azúcar

a. Ayuda a doña Julia a establecer la cantidad de ingredientes que necesita para hacer una torta a 75 personas.

Harina ________________

Polvo royal ________________

Huevos ________________

Mantequilla ________________

Leche ________________

Azúcar ________________

b. ¿Cómo lograste establecer la cantidad de los ingredientes?

4. <u>Realiza los puntos a, b y c de acuerdo con la siguiente información:</u>

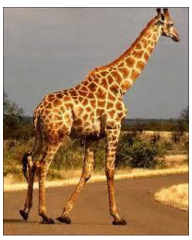
La densidad de una población es la cantidad de personas que habita en 1 km2 de superficie. A continuación se muestran algunos departamentos, su superficie en km2 y cantidad de habitantes correspondiente.

Antioquia	Boyacá
	
Superficie: 63.612 km^2	Superficie: 23.189 km^2
Nº de habitantes: 1'342.347	Nº de habitantes: 1'183.409
Guajira	Cundinamarca
	
Superficie: 20.848 km^2	Superficie: 24.210 km^2
Nº de habitantes: 387.773	Nº de habitantes: 1'658.698

a. Halla la densidad de la población de cada uno de los departamentos.
b. ¿cuál departamento tiene mayor densidad de población?
c. ¿Qué implica que una ciudad tenga mayor densidad de población?

5. <u>Realiza los puntos a y b de acuerdo con la siguiente información:</u>

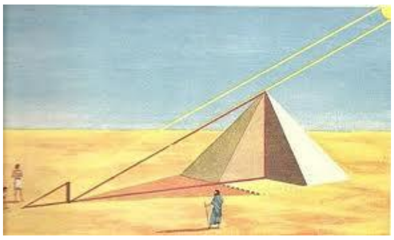
La escala de un plano, mapa o dibujo es la razón entre la longitud medida en dicho plano y la longitud correspondiente en la realidad. Por ejemplo, la foto de la jirafa está en una escala de 1 a 150. Esto significa que por cada centímetro medido en la foto, el tamaño de la jirafa es 150 veces mayor.

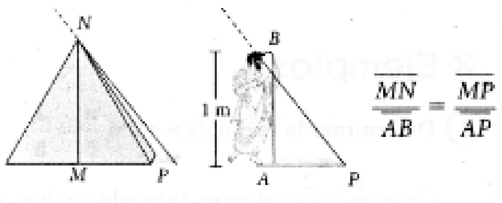


a. Usando una regla mide la altura de la jirafa que aparece en la foto.
b. ¿Cuál es la altura real de la jirafa en centímetros?

6. Realiza el punto a de acuerdo con la siguiente información:

Tales de Mileto utilizó un método interesante para medir la altura de la pirámide de Keops, aplicando las proporciones.

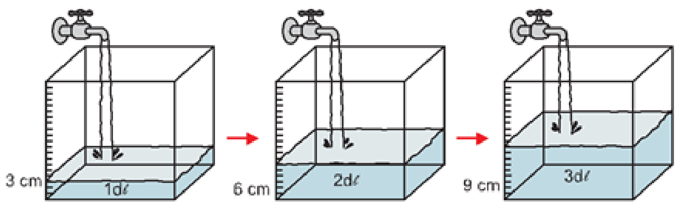




a. Calcula la altura de la pirámide de Keops, teniendo en cuenta que Tales utilizó un bastón de 1 m de largo que proyectó una sombra de 3 m, cuando la pirámide proyectó una sombra de 138 m.

7. Realiza los puntos a, b y c de acuerdo con la siguiente información:

María observó cómo se llenaba de agua un recipiente y decidió tomar los datos en una tabla.



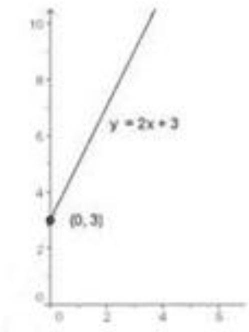
Cantidad de agua *(dl)*	1	2	3	4	5
Profundidad del agua *(cm)*			9		

a. Ayuda a María a completar la tabla

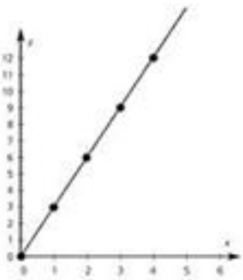
b. ¿Existe alguna relación entre la cantidad de agua y la profundidad? Explica tu respuesta.

c. Si María hiciera una gráfica que muestre el comportamiento de la profundidad del agua con respecto a la cantidad ¿cuál sería la más indicada?

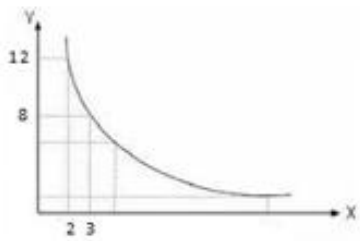
A



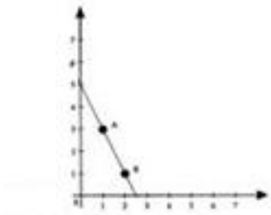
C



B



D



ANEXO 2. ENCUESTA A DOCENTES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA

Nombre: ____

Área de desempeño __________________________________

Estimado docente, el siguiente sondeo se realiza con el fin de recopilar información para el diseño de una propuesta didáctica en la Institución Educativa Departamental San Miguel. Su opinión es muy valiosa y será de gran ayuda.

1. ¿Considera importante que se le dé un enfoque transversal a la enseñanza de las matemáticas, teniendo en cuenta otras áreas del conocimiento? SI___ NO___ ¿Por qué?
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

2. ¿Ha tenido dificultades en la enseñanza de su área, debido a preconceptos que deberían tener los estudiantes en el área de matemáticas? SI___ NO___ De ser así ¿Cómo trata de superar esas dificultades?
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

3. ¿Estaría dispuesto a colaborar en la implementación de una propuesta didáctica, que tenga un enfoque transversal con el área en cual se desempeña como docente?

   SI___ NO___ ¿Por qué?

____
____
____
____
____

4. ¿Ha escuchado el término proporcionalidad? SI___ NO___ De ser así ¿Qué significado tiene para usted?
____
____
____
____
____

Si su respuesta fue afirmativa en la pregunta 4 continúe con la pregunta 5, de lo contrario habrá terminado de responder el sondeo.

5. ¿La proporcionalidad tiene aplicaciones directas en el área en la cual usted se desempeña? SI___ NO___ No conozco____ De tener aplicaciones, por favor descríbalas en el siguiente espacio.
____
____
____
____
____

ANEXO 3. GUÍA 1

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Aplicar el razonamiento proporcional en situaciones cotidianas.

Cocinando Proporcionalmente

HORA DE EXPLORAR: La receta de una ensalada de frutas para cinco personas contiene los siguientes ingredientes:

- Una manzana.
- Una pera.
- Un Banano.
- ¼ de kilo de fresa.
- ¼ de litro de yogurt.
- ½ racimo de uvas.

Se desea realizar un compartir con las 40 personas del salón, manteniendo la receta original y guardando la proporción de sus ingredientes. Teniendo en cuenta estas condiciones ayúdanos a determinar qué cantidad se necesita de cada uno de los ingredientes.

HORA DE ESCRIBIR:

1. Describe la cantidad de ingredientes que se necesitan para las 40 personas.

_____ Manzanas _____ Peras _____Bananos _____Kilos de fresa

_____Litros de yogurt _____Racimos de uvas.

2. Explica como hiciste para determinar la cantidad necesaria de ingredientes.

____
____
____
____
____

ANEXO 4. GUÍA 2

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

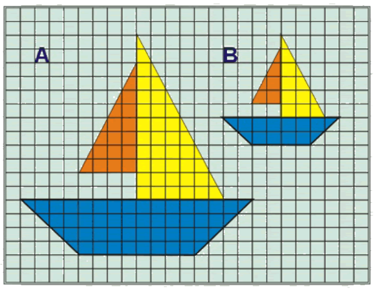
META DE COMPRENSIÓN: Que el estudiante logre **r**ealizar dibujos a escala usando la proporcionalidad como eje central.

Dibujo a Escala

HORA DE EXPLORAR[34]: Para expresar las distancias y superficies reales en espacios pequeños, se usan las ***escalas***. La escala es la razón que hay entre las medidas de un objeto real y la de su reproducción.

EJEMPLOS: Los arquitectos usan escalas para diseñar los planos de los edificios que van a construir. En el papel una línea de 1 cm puede corresponder a 1 m en el terreno.

En la figura el barco B y el barco A están en una escala de 1:2



HORA DE ESCRIBIR:

3. Describe con tus palabras la razón por la cual los barcos del ejemplo anterior están en una escala de 1:2

____

____

4. Observa el ejemplo:

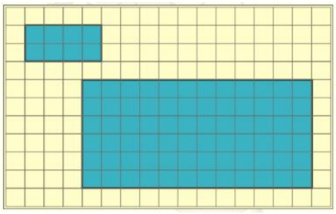
[34] Exploración basada en http://institutomodernoamericano.edu.co/moodle/grados/quinto/contenidos/matematicas/construcc_fig_escala/mat5_036.htm

Dibujar en la cuadrícula un rectángulo semejante al dado en la escala 3:1 quiere decir que:

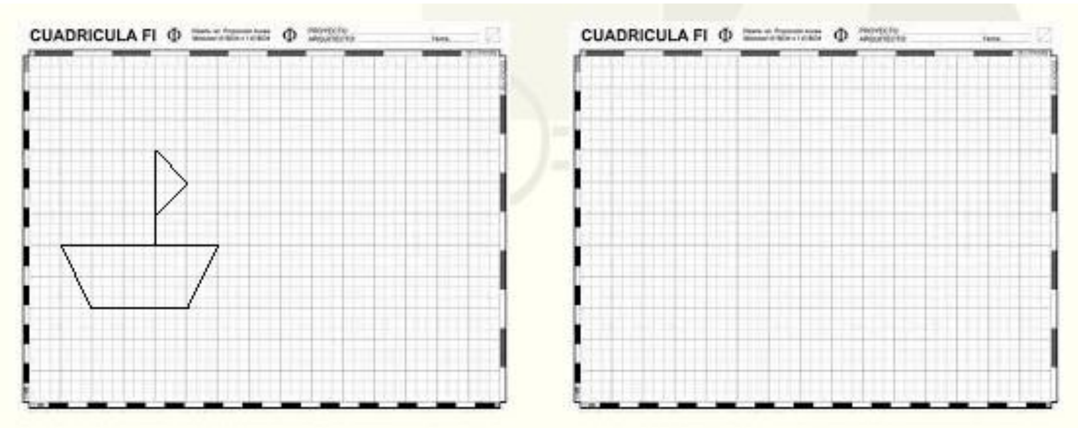
Sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados correspondientes son proporcionales. La escala 3:1 significa que la reproducción debe ser 3 veces más grande que la del objeto real. Las medidas de los lados del rectángulo dado son de 4 y 2 unidades. Para obtener las medidas del rectángulo semejante al dado en la escala 3:1, tenemos que multiplicar las medidas por 3. Así, las medidas de los lados del rectángulo que vamos a dibujar son:

$$4 \text{ X } 3 = 12$$

$$2 \text{ X } 3 = 6$$



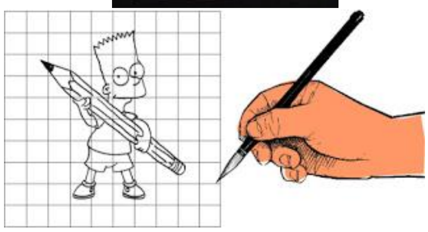
Realiza el dibujo de la primera cuadrícula, en una escala de 1:3, en la segunda cuadrícula.



HORA DE CREAR:

MATERIALES:

- Lápiz, borrador y regla.
- Lamina, o dibujo que se desea hacer a escala.
- Un pliego de cartulina.
- Acetato.
- Marcador.



Realiza una cuadrícula en el dibujo que trajiste de 1cm cada cuadro. Luego deberás hacer la cuadrícula en el pliego de cartulina según la escala asignada. (Con lápiz y un trazo suave que permita borrar). Por ejemplo si la escala es de 1 a 10, cada cuadro deberá hacerse de 10 cm de ancho. Finalmente empieza a realizar tu dibujo a escala.

ANEXO 5. GUÍA 3

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Aplicar el concepto de proporcionalidad al construir un modelo del sistema solar, que conserve las escalas de los diámetros y distancias entre los planetas.

Maqueta Sistema Solar

INVESTIGACIÓN GUIADA: Teniendo en cuenta el video presentado y la consulta hecha sobre el sistema solar, completa la siguiente tabla.

TABLA 1	Diámetros (km)	Distancia al sol (km)
Sol		
Mercurio		
Venus		
Tierra		
Marte		
Júpiter		
Saturno		
Urano		
Neptuno		
Plutón		

HORA DE REPASAR:

La escala en una maqueta es la razón entre cualquier longitud de medida de dicha maqueta y su longitud correspondiente en realidad.

Por ejemplo: La siguiente figura es la maqueta del estadio de la Bombonera del equipo Boca Juniors en argentina. Está hecha en una escala de 1 : 120.

Esto significa que por cada centímetro medido en la maqueta, el tamaño real del estadio es 300 veces mayor.

1. Si la medida de la altura de la maqueta del estadio es de 24 cm. ¿Cuánto mide la altura del estadio original en centímetros?
2. ¿Cuánto mide la altura del estadio original en metros?
3. Si el estadio original tiene unas dimensiones de 68 m X 105 m. ¿Cuáles son las dimensiones de la maqueta?

HORA DE CREAR:

Con ayuda del docente y tus compañeros de clase, llena la siguiente tabla, teniendo una escala de 55.000 km a 1 cm.

TABLA 2	Diámetros (cm)	Distancia al sol (m)
Sol		
Mercurio		
Venus		
Tierra		
Marte		
Júpiter		
Saturno		
Urano		
Neptuno		
Plutón		

1. Según los resultados obtenidos, ¿cuáles materiales consideras, son indicados para realizar la maqueta del sistema solar, según cada planeta?

   Sol:___________________
   Mercurio, Venus, Tierra, Marte y plutón:_______________
   Saturno y Júpiter:_______________
   Urano y Neptuno:________________

ANEXO 6. GUÍA 4

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Comprender las escalas utilizadas en los mapas geográficos, al trabajar de manera interdisciplinar con el concepto de proporción.

Mapas y Escalas

EXPLORACIÓN[35]:

¿Qué es la escala de un mapa?

La escala de un mapa se define como la relación de proporcionalidad que existe entre una distancia medida en el terreno y su correspondiente medida en el mapa.

Como, sabes un mapa es una representación de un lugar, a un tamaño menor que el tamaño real. Con la escala sabemos cuánto se redujo la representación de un lugar, para mostrarlo en un mapa. Al leer un mapa, la escala nos permite calcular las distancias verdaderas del lugar.

Una escala puede estar representada de forma numérica o de forma gráfica.

NÚMERICA:

Indica las veces que tendrás que aumentar el mapa para que tenga el tamaño real. Se expresa como un número o una fracción. Ejemplo: La escala 1 : 1000 “se lee uno a mil” indica una reducción de la realidad al mapa de mil veces.

GRÁFICA:

Es una línea recta dividida en unidades iguales. Cada unidad de la escala gráfica equivale a determinada distancia del lugar real. Ejemplo:

[35] Exploración basada en http://www.proyectosalonhogar.com/Salones/Historia/1-3/3ro/Escala/Indice.htm

Según esta escala se debe medir con una regla la distancia que hay entre el 0 y el 190 (2 cm). Esta distancia equivale a 190 Km. Por lo tanto la escala es 2 : 190.

HORA DE INTENTARLO:

Preguntas:

a) ¿A cuántos kilómetros equivale 1 centímetro en el mapa?
b) ¿A qué escala está dibujado el mapa?
c) ¿A qué distancia se encuentra Bogotá de Cartagena, Leticia de Puerto Bolívar y Medellín de Cali?
d) Se sabe que la distancia real entre Bogotá y Manizales es de300 Km. ¿Por cuántos centímetros estarían distanciadas estas dos ciudades en el mapa?

ANEXO 7. GUÍA 5

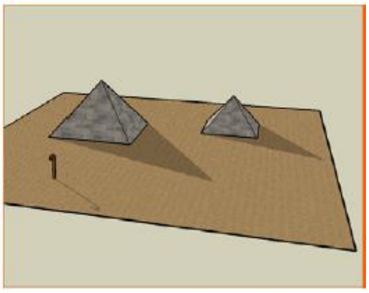
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Medir la altura del edificio del colegio utilizando los conceptos de proporción y semejanza.

Medición de Edificios

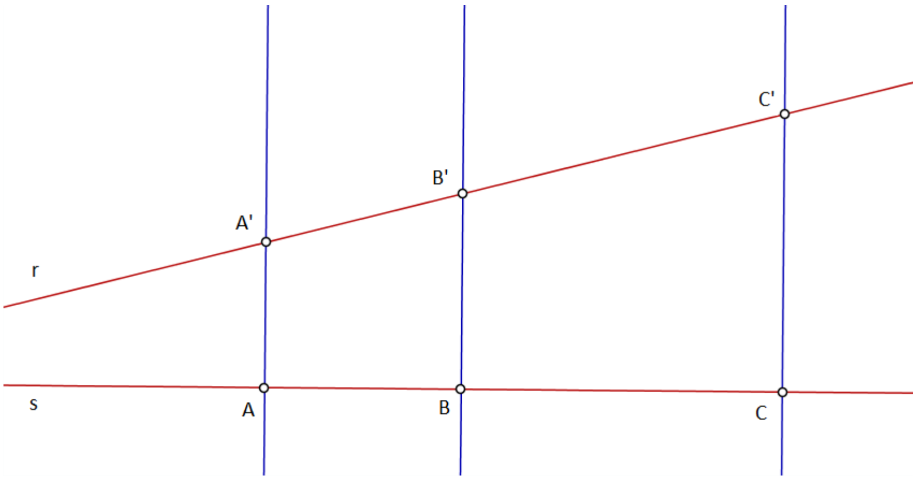
EXPLORACIÓN[36]:

TALES DE MILETO: Fue un filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VI a. C. Calculó las alturas de las pirámides de Egipto comparando sus sombras con las de un bastón



Teorema de Tales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos secantes r y s, los segmentos que determinan dichas paralelas en la recta r son proporcionales a los segmentos que determinan en s.

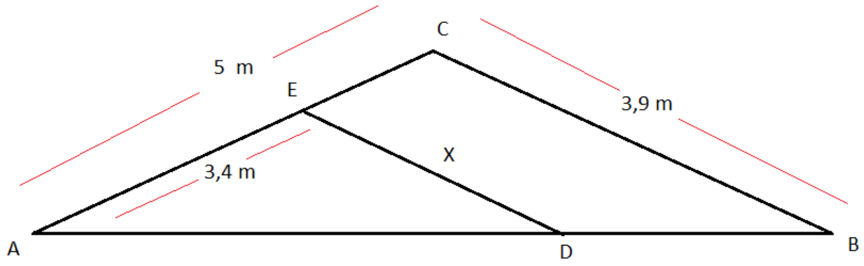


$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

[36] Exploración basada http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_semejanza_teorema_pitagoras/2esoquincena7.pdf

APLICACIÓN:

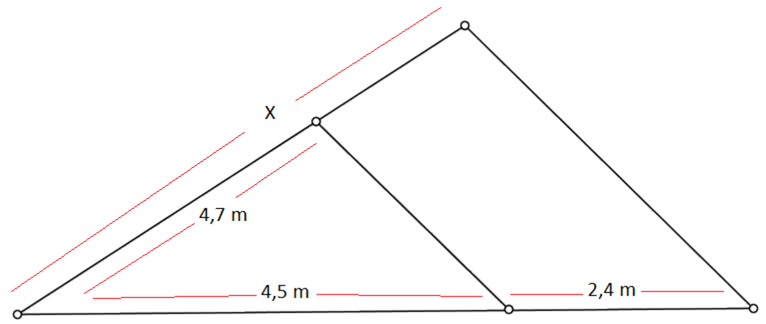
Gracias al teorema de tales podemos calcular la longitud de los lados de figuras que posean lados paralelos. Por ejemplo: En la siguiente figura los lados $\overline{ED}$ y $\overline{CB}$ son paralelos. Calcula la longitud del lado $\overline{ED}$



Aplicando el teorema de Tales tenemos $\frac{5\,m}{3{,}4\,m} = \frac{3{,}9\,m}{x}$ por lo tanto $x = 2{,}65\,m$

HORA DE INTENTARLO:

Calcula el valor de x en la figura.

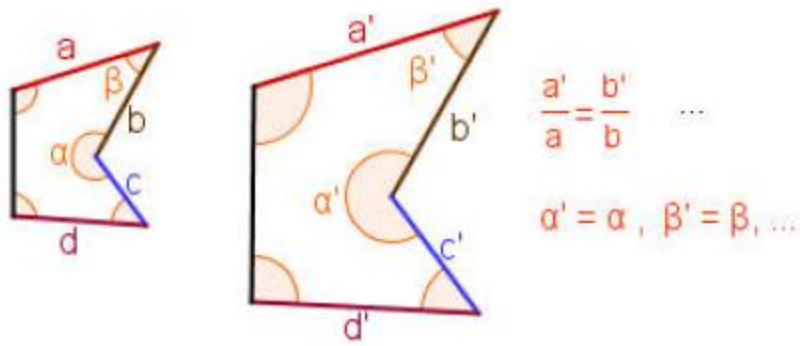


HORA DE RECORDAR:

FIGURAS SEMEJANTES

Dos figuras son semejantes si sus segmentos correspondientes son proporcionales y sus ángulos congruentes. Es decir; o son iguales, o tienen la misma forma y sólo se diferencian en su tamaño.

Cada longitud en una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo que se llama razón de semejanza.



CRITERIO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Un criterio de semejanza de dos triángulos es un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, podemos asegurar que los dos triángulos son semejantes.

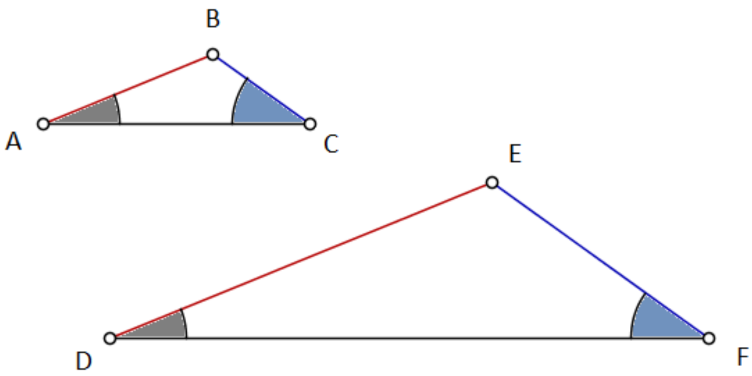
No es necesario comprobar que sus ángulos son iguales y que sus lados son proporcionales para saber si dos triángulos son semejantes. Es suficiente que se cumpla el siguiente criterio:

CRITERIO ÁNGULO ÁNGULO: A A

En la figura los ángulos
$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$
$\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle EFE$

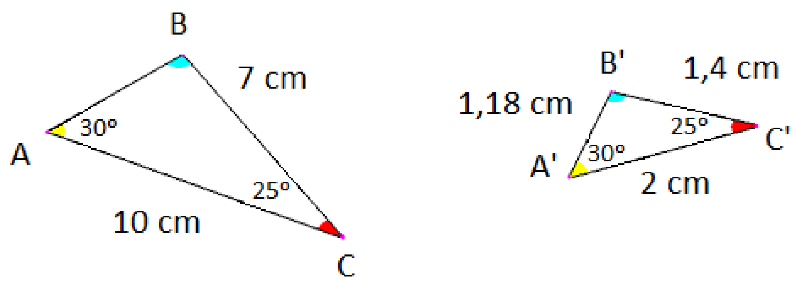
Por lo tanto se puede asegurar que:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

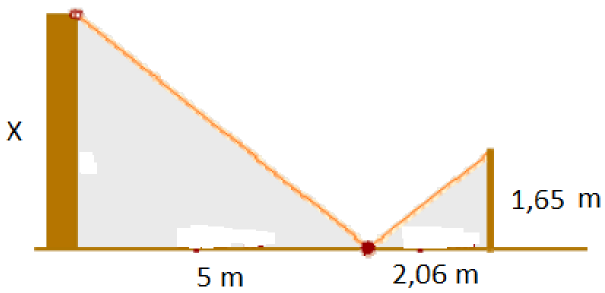


HORA DE PRACTICAR:

1. ¿Son semejantes los siguientes triángulos? ¿Por qué? En caso afirmativo calcula el lado que hace falta.



2. Un observador, cuya altura desde sus ojos al suelo es 1,65 m, ve reflejada en un espejo la parte más alta de un edificio. El espejo se encuentra a 2,06 m de sus pies y a 5m del edificio. Halla la altura del edificio.



APLICACIONES: La semejanza de figuras, y en particular la semejanza de triángulos, tiene muchas aplicaciones prácticas. Entre otras:

- Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra.
- Cálculo de la altura de un objeto vertical con un espejo.
- Cálculo de la altura de un objeto vertical por observación directa.

INVESTIGACIÓN GUIADA:

Con ayuda de tus compañeros de grupo y basado en los conocimientos adquiridos, realizarás la medición del edificio del colegio usando tres métodos.

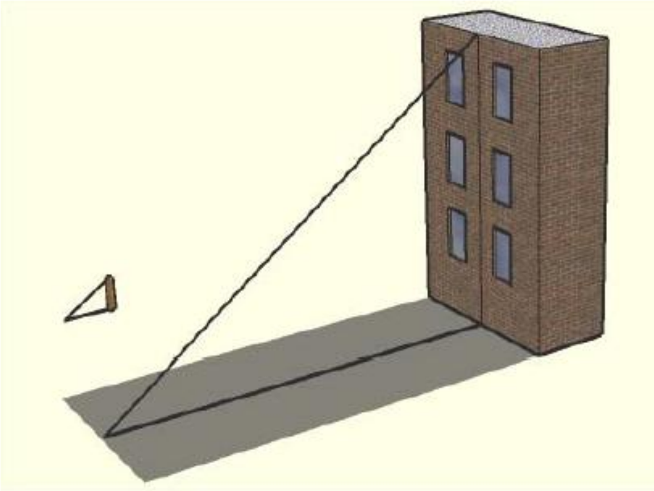
MATERIALES:

- Metro.
- Espejo.

PRIMER MÉTODO

Para determinar la altura del edificio se medirá la longitud de la sombra proyectada sobre el suelo y la sombra que proyecte uno de los compañeros de la clase. Teniendo esos datos y la estatura de tu compañero podrás estimar la medida del edificio.

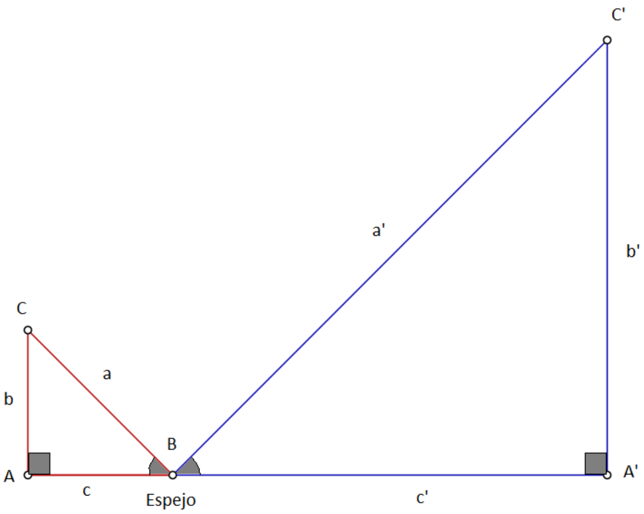
1. Realiza un esquema de la situación.
2. Realiza la toma de datos.
3. Realiza los cálculos requeridos.



SEGUNDO MÉTODO

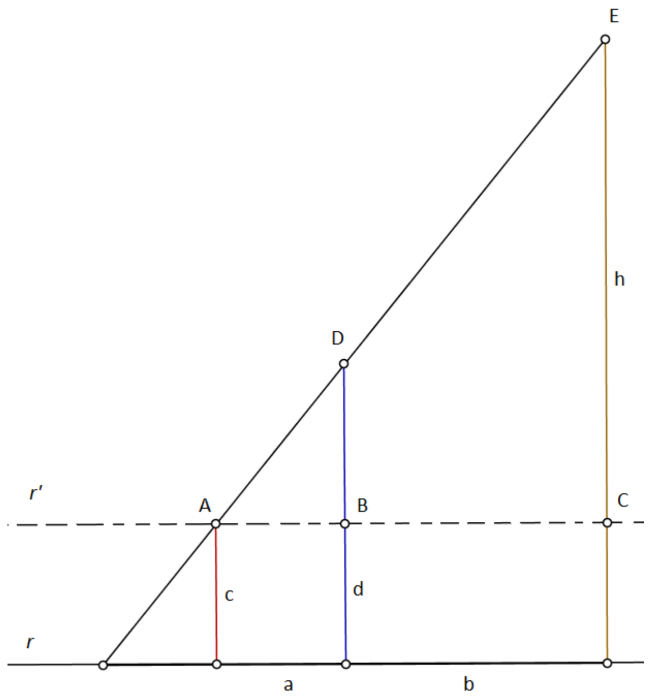
Utilizando un espejo plano y aprovechando que el ángulo de reflexión de los rayos que se reflejan en él, coinciden con el de incidencia, se determinará por semejanza de triángulos la altura del edificio.

1. Se coloca un espejo pequeño en el suelo.
2. El observador se sitúa de forma que, erguido, pueda ver reflejada en el espejo la parte más alta del edificio.
3. Se miden la altura del observador (desde sus ojos al suelo), la distancia de éste al espejo y la distancia del espejo al edificio.
4. Finalmente realiza los cálculos requeridos.



TRECER MÉTODO

El tercer método será por observación directa y consiste en hacer coincidir, desde nuestro punto de visión, el punto más alto de un objeto (por ejemplo una vara o un compañero) cuya altura conocemos, con el punto más elevado del edificio.



1. Realiza la toma de datos.
2. Realiza los cálculos requeridos.

ANEXO 8. GUÍA 6

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Utilizar de manera interdisciplinar el concepto de proporción con base en los trazos estelares.

Trazos Estelares

HORA DE EXPLORAR[37]:

La Tierra gira una vez sobre su eje en 23 horas y 56 minutos, si bien desde la superficie terrestre a nosotros los observadores nos parece que son las estrellas las que se desplazan por la bóveda celeste. Si dejamos una cámara réflex sobre un trípode y apuntamos a cualquier parte del cielo, dejando el obturador de la cámara abierto, las estrellas se mostrarán como trazos; resultado de su movimiento por el firmamento mientras la cámara "mira" al mismo. En cuanto mayor sea el tiempo de exposición, más largos serán los trazos. En esta fotografía se ha apuntado en dirección a Sagitario, donde se encuentra el centro de la Vía Láctea, durante una hora y media.

PERIODO DE ROTACIÓN CELESTE

[37] Exploración basada en http://www.sea-astronomia.es/drupal/node/1059

El periodo de rotación celeste es el tiempo que tardan las estrellas desplazándose por la bóveda celeste, hasta completar una vuelta completa, es decir 360°. Es importante aclarar que los observadores terrestres ven que las estrellas giran, pero en realidad es la tierra la que rota, esto se conoce como el movimiento diurno aparente de los astros.

Para lograr calcular el periodo de rotación terrestre, se hace necesario establecer términos desconocidos en proporciones dadas.

HORA DE PRACTICAR:

1. Con tus compañeros discute la forma de calcular los términos desconocidos en cada una de las siguientes proporciones:

   a. Tres es cuatro como __________ es a ocho.
   b. Dos es a cinco como __________ es veinte.
   c. $5\!:w :: 15\!:21$
   d. $9\!:2 = 54\!:m$
   e. $\frac{2}{12} = \frac{12}{b}$
   f. $\frac{y}{2} = \frac{15}{6}$
   g. $\frac{7}{a} = \frac{28}{21}$
   h. $\frac{3}{4} = \frac{x}{2{,}2}$

2. Soluciona los siguientes problemas.

   a. Por trabajar 5 horas diarias, Julián recibe un salario de $ 350.000. ¿Cuántas horas al día debe trabajar para recibir un salario de $ 560.000?

   b. La razón de consumo de agua por persona en un día caluroso es 3,75 litros por cada 3 personas. En las mismas condiciones, ¿cuántos litros de agua consumen diariamente 7 personas?

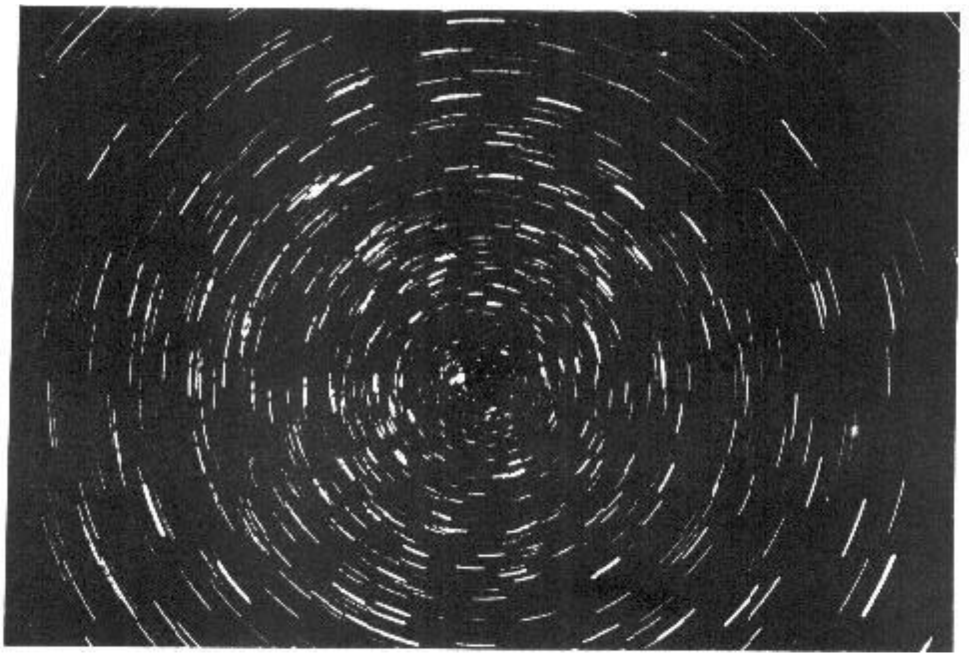
HORA DE SEGUIR PRACTICANDO:

La siguiente fotografía muestra el movimiento de rotación de las estrellas en torno a la estrella polares, ubicada cerca del polo norte celeste. El tiempo de exposición de la cámara fue de 35 minutos.

1. Ubica el centro de rotación de las estrellas.
2. Escoge uno de los trazos estelares y con ayuda de un transportador calcula el ángulo central.
3. Expresa el siguiente enunciado en alguna de las formas para simbolizar una proporción.

El ángulo central de un trazo es al tiempo de exposición, como el ángulo de 360° (correspondiente a una vuelta completa), es al periodo de rotación de la Tierra.

4. Determina los valores que conoces en el enunciado anterior.
5. De acuerdo con lo anterior calcula el periodo de rotación de la tierra.



ANEXO 9. GUÍA 7

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Utilizar el método de Lincon para estimar la cantidad de objetos de un conjunto que a simple vista no se puede determinar.

Conteo con Captura y Recaptura

HORA DE EXPLORAR[38]:

El método Lincon es uno de los métodos utilizados por los biólogos cuando se desea estimar la cantidad de animales que habitan un ecosistema. Un ejemplo de la utilización de este método es el siguiente: para conocer la cantidad de tilapias de un estanque artificial, se capturan, sin dañar, un número de tilapias y se les coloca a cada una un anillo para identificarlas. Luego se liberan de nuevo en el estanque. Pasados unos días se capturan de nuevo un número importante de tilapias y se verifica cuántas de ellas tienen anillo. Las que tienen el anillo son una fracción del total de tilapias marcadas. Estadísticamente se estima que la proporción entre estos dos números es la misma que la existente entre el total de tilapias capturadas la primera vez y el total de tilapias del estanque.

HORA DE ANALIZAR:

1. Expresa el siguiente enunciado en forma de proporción sí:

N: Número de peces marcados la primera vez.
n: Número de peces capturados y marcados la segunda vez.
m: Número total de Peces capturados.
M: Total de la población.

[38] Exploración basada en MORALES, M. SALGADO, D. (2004).

El número de peces capturados y marcados la segunda vez es al total de peces marcados la primera vez, como el total de peces capturados es al total de la población.

INVESTIGACIÓN GUIADA:

MATERIALES POR GRUPO:

- Una libra de fríjoles.
- Una bolsa plástica.
- Un marcador.

Se desea estimar la cantidad de fríjoles que hay en una libra y para ello se utilizará el método de Lincon.

1. Deposite la libra de fríjoles en una bolsa.
2. A un puñado de fríjoles (Aproximadamente unos 50 granos) realícele una señal utilizando un marcador. Cuente la cantidad de fríjoles marcados.
3. Deposítelos nuevamente en la bolsa y revuélvalos con los demás.
4. Realice diferentes extracciones (puñado de fríjoles) y cuente cuántos sacó y cuántos de ellos están marcados. Complete la siguiente tabla.

N de extracciones	Primera Extracción	Segunda Extracción	Tercera Extracción	Cuarta Extracción	Quinta Extracción
Cantidad de fríjoles capturados					
Cantidad de fríjoles marcados					

5. Para cada una de las extracciones, calcule la cantidad de fríjoles de la bolsa utilizando lo hecho en la exploración.
6. Realice una aproximación de la cantidad de fríjoles que tiene una libra.

ANEXO 10. GUÍA 8

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL SAN MIGUEL
MATEMÁTICAS
RAZONAMIENTO PROPORCIONAL
GRADO SÉPTIMO
2014

META DE COMPRENSIÓN: Acercar a los estudiantes a la modelación matemática a través de experimentos sencillos, que abarquen el concepto de proporcionalidad.

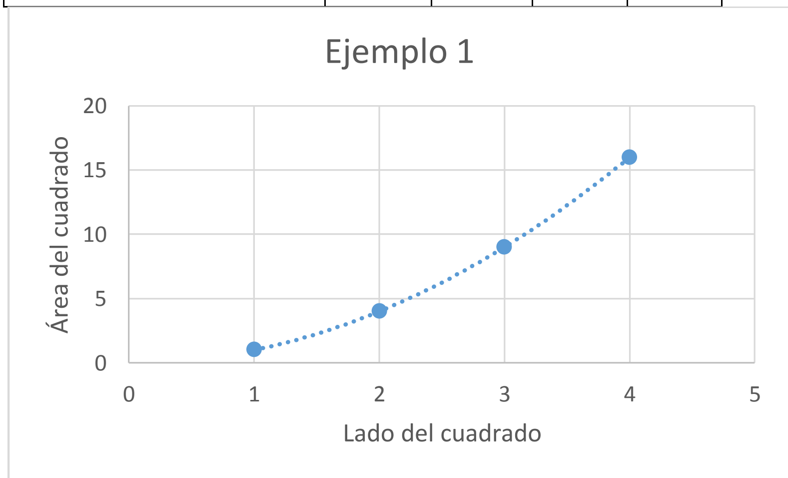
Medir el Tiempo de Caida del Agua

HORA DE EXPLORAR:

- Dos magnitudes son **directamente correlacionadas**, cuando al aumentar una de ellas, la otra también aumenta o, cuando al disminuir una de ellas, la otra también disminuye.

  Ejemplo1: La siguiente tabla relaciona el área y el lado de diferentes cuadrados:

Longitud del lado del cuadrado (cm)	1	2	3	4
Área del cuadrado (cm^2)	1	4	9	16

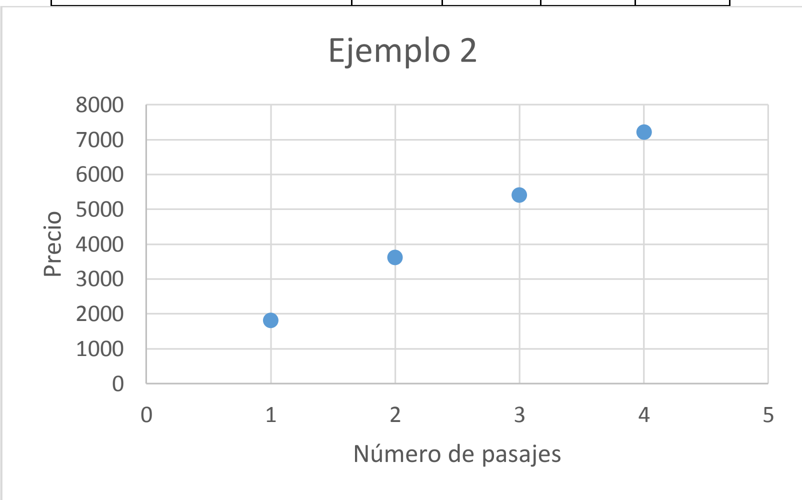


Ten en cuenta lo siguiente: Si dos magnitudes son directamente correlacionadas y además crecen de manera proporcional guardando la misma razón, podemos decir que las magnitudes son directamente proporcionales.

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si la razón entre cada medida de una de ellas y la respectiva medida de la otra es igual a una constante.

  Ejemplo 2: La siguiente tabla relaciona la cantidad de pasajes y el respectivo precio a pagar en el sistema de trasporte Transmilenio.

Número de pasajes	1	2	3	4
Precio a pagar (pesos)	1800	3600	5400	7200



Observa que la razón entre cada par de valores correspondientes es siempre el mismo:

$\frac{1800}{1} = 1800$ $\quad \frac{3600}{2} = 1800$ $\quad \frac{5400}{3} = 1800$ $\quad \frac{7200}{4} = 1800$

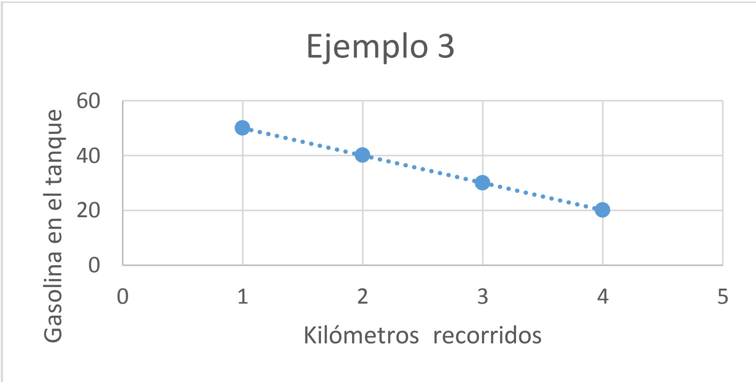
Algo que no sucede en el primer ejemplo de magnitudes directamente correlacionadas:

$\frac{1}{1} = 1$ $\quad \frac{4}{2} = 2$ $\quad \frac{9}{3} = 3$ $\quad \frac{16}{4} = 4$

- Dos magnitudes son **inversamente correlacionadas**, cuando al aumentar una de ellas, la otra disminuye.

  La siguiente tabla muestra la relación entre la cantidad de kilómetros recorridos y la cantidad de gasolina que queda en el tanque.

Kilómetros recorridos	1	2	3	4
Gasolina en el tanque	50	40	30	20

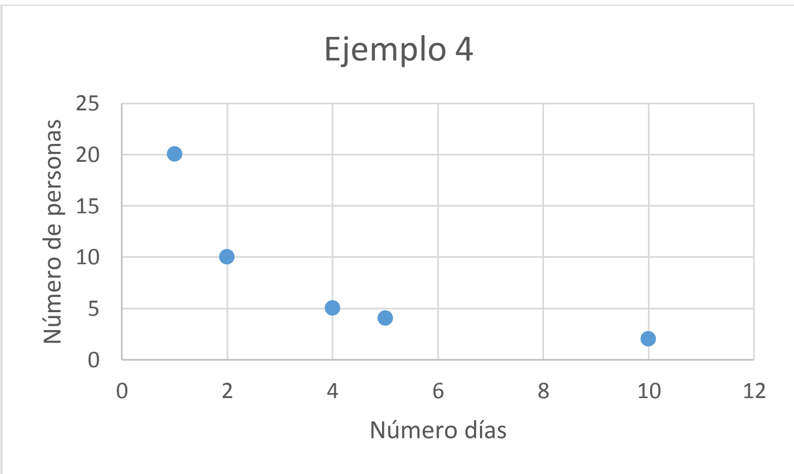


Ten en cuenta lo siguiente: Si dos magnitudes son inversamente correlacionadas y además el producto de sus cantidades correspondientes siempre es el mismo, podemos decir que las magnitudes son inversamente proporcionales.

- Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando el producto de cada medida de una magnitud por la respectiva medida de la otra magnitud es igual a una constante.

  La siguiente tabla muestra la relación entre el número de personas y el número de días que dura cierto alimento.

Número de Personas	1	2	4	5	10
Número de Días	20	10	5	4	2



Observa que el producto entre cada par de valores correspondientes de las magnitudes es constante:

$1 \text{ X } 20 = 20$ $2 \text{ X } 10 = 20$ $4 \text{ X } 5 = 20$ $5 \text{ X } 4 = 20$ $10 \text{ X } 2 = 20$

Algo que no sucede en el ejemplo de magnitudes inversamente correlacionadas:

$1 \text{ X } 80 = 80$ $2 \text{ X } 70 = 140$ $3 \text{ X } 60 = 180$ $4 \text{ X } 50 = 200$

INVESTIGACIÓN GUIADA:

MATERIALES POR GRUPO:

- Una botella plástica de 1,3 litros de capacidad. Se le cortará la parte inferior.
- Cuatro tapas de botellas con orificios de diferente diámetro según el color: Tapa Azul 2,5 mm; tapa roja 3,5 mm; tapa amarilla 4,8 mm; tapa verde 6mm.
- Un cronómetro.
- Un recipiente de menor capacidad que la botella (unos 200 ml) el cual se usará como unidad de medida de volúmenes de agua. (Puede ser un vaso plástico)
- Un recipiente para contener el agua que sale de la botella.
- Computador portátil con Excel (Sala de sistemas de la institución, con computadores para educar)

Se desea analizar el tiempo que tarda una botella en desocuparse, si se hace variar el volumen de agua y el diámetro del orificio.

Primera parte:

Seleccione la tapa Azul, la cual tiene un orificio de 2,5 mm. Cronometre el tiempo en que tarda en desocuparse la botella con un volumen de agua (un vaso lleno de agua) y registre los datos en la siguiente tabla. Repita el proceso hasta llegar a los seis volúmenes (seis vasos llenos de agua).

Tapa Azul (2,5 mm)	
Volúmenes	**Tiempo Seg**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Repita el proceso anterior con cada una de las tapas y registre los datos obtenidos.

Tapa Roja (3,5 mm)	
Volúmenes	**Tiempo Seg**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Volúmenes	**Tiempo Seg**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Tapa Verde (6 mm)	
Volúmenes	**Tiempo Seg**
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Segunda parte:

A continuación Registre el tiempo que tarda en desocuparse la botella, si dejamos el volumen constante y hacemos variar el diámetro.

Volumen 1	
Diámetro del orificio	**Tiempo Seg**
Tapa Azul (2,5 mm)	
Tapa Roja (3,5 mm)	
Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Tapa Verde (6 mm)	

Volumen 2	
Diámetro del orificio	**Tiempo Seg**
Tapa Azul (2,5 mm)	
Tapa Roja (3,5 mm)	
Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Tapa Verde (6 mm)	

Volumen 3	
Diámetro del orificio	**Tiempo Seg**
Tapa Azul (2,5 mm)	
Tapa Roja (3,5 mm)	
Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Tapa Verde (6 mm)	

Volumen 4	
Diámetro del orificio	**Tiempo Seg**
Tapa Azul (2,5 mm)	
Tapa Roja (3,5 mm)	
Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Tapa Verde (6 mm)	

Volumen 5	
Diámetro del orificio	**Tiempo Seg**
Tapa Azul (2,5 mm)	
Tapa Roja (3,5 mm)	
Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Tapa Verde (6 mm)	

Volumen 6	
Diámetro del orificio	**Tiempo Seg**
Tapa Azul (2,5 mm)	
Tapa Roja (3,5 mm)	
Tapa Amarilla (4,8 mm)	
Tapa Verde (6 mm)	

Tercera parte:

Con los datos registrados realice las gráficas correspondientes en Excel, siguiendo las indicaciones del docente de informática. Tenga en cuenta que es indispensable llevar los datos obtenidos en la práctica.

HORA DE ANALIZAR:

Con los resultados obtenidos realiza una descripción escrita, donde se argumente si las magnitudes del estudio son:

- Directamente correlacionadas.
- Directamente proporcionales.
- Inversamente correlacionadas.
- Inversamente proporcionales.

____
____
____
____
____
____
____
____

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] ÁLVAREZ, E. (2012). Elementos de geometría. Sello Editorial Universidad de Medellín.

[2] BRUÑO, G. M. (1960). Geometría curso superior. Editorial Bedout.

[3] CHIZNER, J. ROMERO, J. (2010). Hipertexto matemáticas 7. Editorial Santillana.

[4] DOCZI, GYORGY. (2004). El poder de los límites. Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura, trd. de Alejandra Vucetich, Buenos Aries, Troquel, 2004, pp. 1 y 8.

[5] Dra. ROSA. M. ROS. (1996). Matemática aplicada y relaciones de proporcionalidad. Revista EMA, Vol. 1 Nº 2, Págs. 125 a 139.

[6] ESPINOZA, C.E. Una propuesta didáctica para la enseñanza de la proporcionalidad en el grado octavo de la Institución Educativa María Josefa Marulanda del municipio de la Ceja. Trabajo final del programa Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Medellín: 2012.

[7] Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Sociales y Ciencias Naturales. Santafé de Bogotá: s.n., 2003.

[8] Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Santafé de Bogotá: s.n., 2003.

[9] EUCLIDES, Elementos, 1994, Editorial Gredos. Madrid.

[10] FIOL, M. L., FORTUNY, J. M. Proporcionalidad Directa: La Forma y el Número. Editorial Síntesis. 1990.

[11] GODINO, J. y BATANERO, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros.

[12] GÓMEZ, C. (1998). Números Racionales y Razonamiento Proporcional: Una Propuesta Curricular Basada en los Estándares del NCTM. Revista EMA, Vol. 3 Nº 2, Págs. 112 a 132.

[13] GUERRERO, A.B. (2002). Geometría en el plano y en el espacio. Universidad Nacional de Colombia.

[14] HOLGUÍN, O.C. Razonamiento Proporcional. Trabajo final del programa Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá: 2012.

[15] LESH, R., POST, T., & BEHR, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (pp. 93-118). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[16] MARAÑON, M. (2012). Una aplicación de la proporcionalidad geométrica a la realidad como elemento motivador del alumno.

[17] MEJÍA, F. (2009). Proporciones y progresiones. Sello Editorial Universidad de Medellín.

[18] MINISTERIO DE EDUACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Santafé de Bogotá: s.n., 1998.

[19] MOISE, E. Elementary Geometry from an advanced standpoint. Addison-Wesley Pub. Co, 1963.

[20] MORALES, M. SALGADO, D. (2004). Aritmética y Geometría II. Editorial Santillana.

[21] MOSTERÍN, J. (2014). La estructura de los conceptos científicos I. Ciencia al viento número 7. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia.

[22] MOSTERÍN, J. (2014). La estructura de los conceptos científicos II. Ciencia al viento número 8. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia.

[23] PANIZZA, M. y SADOVSKY, P. (1994). El papel del problema en la construcción de conceptos matemáticos. Fragmento 4. La construcción del campo conceptual de la proporcionalidad directa. Ministerio de educación. Provincia de Santa Fé, Argentina.

[24] PARRA, F. ÁVILA, R. y otros (2013). El significado del objeto matemático proporcionalidad.

[25] PERALTA, J. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid. Rescatado de http://divulgamat2.ehu.es /divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3372%3Athales-de-mileto-624-ac-547-ac&catid=37%3Abiograf-de-matemcos-ilustres&Itemid=33&limitstart=2

[26] PERRY, P. GUACANAME, E. y otros. Transformar la enseñanza de la proporcionalidad, un hueso duro de roer. Una Empresa Docente. Bogotá 2003.

[27] SÁNCHEZ, F. Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y viceversa en el conjunto de los

racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá: 2012.

[28] STONE, M. (1999). La enseñanza para la comprensión. Buenos Aires. Editorial PAIDOS.

[29] TOLEDO, Y. Sección Aurea en Arte, Arquitectura y Música. Accesible en http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf